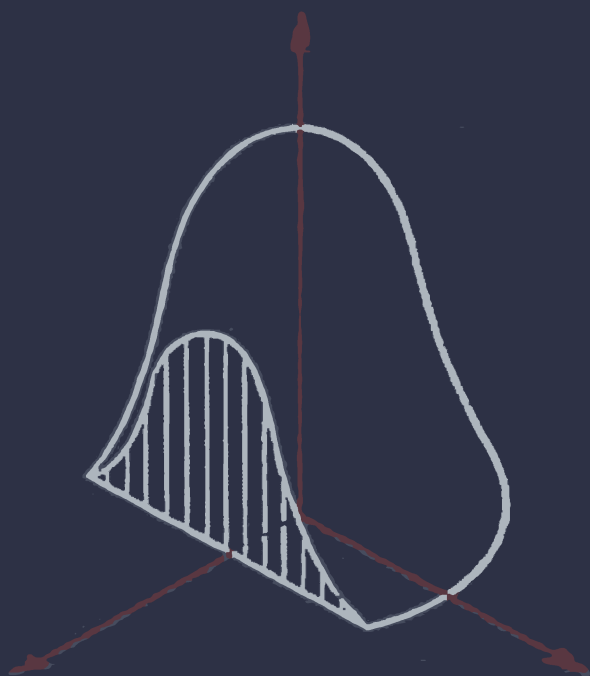


Э. Мушик, П. Мюллер

# МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ



Издательство «Мир»

# ENTSCHEIDUNGSPRAXIS

Ziele Verfahren Konsequenzen

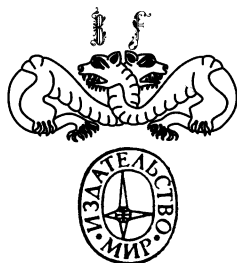
Prof. Dr. sc. techn. Edwin Muschick  
Prof. Dr. sc. nat. Paul Heinz Müller

VEB Verlag Technik Berlin

Э. Мушик, П. Мюллер

# МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Перевод с немецкого  
канд. техн. наук **Н. В. Васильченко**,  
канд. физ.-мат. наук **В. А. Душского**



Москва «Мир» 1990

ББК 22.17  
М 93  
УДК 519.816

**Мушик Э., Мюллер П.**

**М 93** Методы принятия технических решений: Пер. с нем. —  
М.: Мир, 1990. — 208 с., ил.  
ISBN 5-03-001284-2

В книге известных специалистов из ГДР в области кибернетики и математической статистики рассматривается одна из наиболее актуальных проблем современной инженерной и хозяйственной деятельности — проблема принятия решений. Рассматриваются критерии и методы принятия технико-экономических решений, условия и практические ограничения, оцениваются степень риска и эффективность принятого решения. Приводятся примеры принятия решений из различных отраслей техники.

Для проектировщиков, конструкторов, экспериментаторов, экономистов и администраторов, по характеру своей деятельности связанных с принятием тех или иных технических и хозяйственных решений и желающих овладеть современной методологией и математическим аппаратом принятия решений.

**М** 1602110000—398  
041(01)—90 21—90

**ББК 22.17**

*Редакция литературы по новой технике*

ISBN 5-03-001284-2 (русск.)  
ISBN 3-341-00077-1 (нем.)

© VEB Verlag Technik, Berlin, 1987  
© перевод на русский язык с изменениями и дополнениями, Н. В. Васильченко, В. А. Душский, 1990

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Необходимость принимать решения, для которых не удастся полностью учесть предопределяющие их условия, а также последующее их влияние (мы называем оба этих обстоятельства эффектом неопределенности), встречается во всех областях техники, экономики и социальных наук. Планирование — в самом широком смысле этого слова — всегда более или менее связано с подобными факторами неопределенности. Тем не менее отказаться в такой ситуации от принятия решений большей частью бывает невозможно. Поэтому необходимо стремиться к оптимальному использованию имеющейся информации относительно поставленной задачи, чтобы, взвесив все возможные варианты решения, постараться найти среди них наилучший.

Этой общей задаче и посвящается предлагаемая книга. В основе ее лежат многолетние исследования и практический опыт в области электроэнергетики. Книга предназначена в первую очередь для инженеров, но охватывает также общие ситуации принятия решений и в других областях. Среди прочих приводятся критерии принятия решений, гибко приспособляющиеся к различным ситуациям, исключаящие при этом субъективный момент и основанные на объективных принципах, так что возможными оказываются их программирование и перенос процесса принятия решений на ЭВМ. Хотя книга в первую очередь предназначена для инженеров, но и экономисты найдут в ней много важных сведений, поскольку в обеих областях имеется много общего как в постановке задач, так и в оценке целесообразности принципов принятия решений.

Изложение ведется на точном количественном уровне с неизбежным использованием математической символики, настолько, однако, простой, что она оказывается вполне доступной инженерному взгляду на вещи. Знания основ математики вполне достаточно, чтобы усвоить предлагаемый материал и с пользой его применять на практике. Мы надеемся, что читатели, особенно практики, подтвердят это мнение. Критические замечания читателей будут приняты нами с благодарностью.

Мы благодарим сотрудников группы основ технических решений института Циттау, и особенно д-ров Гензеля и Урбана, за ценные замечания при обсуждении материала, а также за выполненные ими многочисленные расчеты.

Работникам издательства Technik, и прежде всего г-же Нетц и г-ну Фишеру, мы приносим благодарность за поддержку и доброжелательность при сотрудничестве.

Особое удовлетворение вызывает у нас возможность представить результаты наших исследований советскому читателю. Мы использовали эту возможность и для того, чтобы внести в книгу соответствующие изменения и дополнения. Нас очень интересует, как будет принята наша книга специалистами в Советском Союзе. Мы благодарны издательству «Мир» за труд по переводу и изданию книги «Методы принятия технических решений» на русском языке.

*Эдвин Мушик  
Пауль Хайнц Мюллер*

---

## ВВЕДЕНИЕ

---

Принимать решения приходится во всех областях человеческой деятельности. В интересующей нас области инженерной практики все чаще возникает потребность в принятии сложных решений, последствия которых бывают очень весомы. В связи с этим появляется потребность в руководстве по принятию решений, которые упрощали бы этот процесс и придавали решениям большую надежность.

Такая тенденция неизбежно требует формализации процесса принятия решений, против чего у практиков могут возникнуть определенные возражения. Дело в том, что важные решения нередко принимаются опытными людьми, довольно далеко отстоящими от математики, и особенно от ее новых методов, и опасаящимися больше потерять от формализации, чем выиграть. Кроме того, предлагаемые математические методы могут неявно использовать такие методы оценивания, к которым инженеры испытывают недоверие. Процесс формализации предполагает известное принуждение, так что применяющий их чувствует, что его лишают свободы решения. Как раз в таких случаях становится неизбежным отказ от некоторых требований, связанных с существом дела, поскольку отказ от действенных методов может привести к еще большим потерям. В этой книге мы пытаемся дать проблемам принятия решений обоснованное и наглядное представление с возможно более полным учетом всех имеющихся аспектов. При этом становится очевидным, что адекватная формализация может оказать существенную помощь при решении практических задач.

Поскольку в будущем принимаемые решения все в большей степени должны подкрепляться глубоко продуманной и допускающей формализацию аргументацией, естественно обратиться к надежным и работоспособным методам. Но для того, чтобы найти общий язык с инженером-практиком, который меньше занимается теорией и вместе с тем несет большую производственную ответственность, была принята принципиальная установка обращаться к математике только в пределах необходимого.

Методы принятия решений, не получившие до сего времени достаточного обоснования, ограничены в нашем изложении представленными приемами, причем, когда без них не удастся обойтись, на это явно указывается. Так мы сознательно прихо-

дим к исключению неконтролируемых субъективных влияний на проблемы оценивания.

Если принятия решений в условиях неопределенности ранее нередко удавалось избежать, требуя от заказчика более полную информацию, то теперь, имея дело со все более сложными техническими системами и процессами, проектант должен сам оценивать и устранять многие неопределенности, уточнение которых он более не может перекладывать на заказчика. Это тем более справедливо, поскольку проектант в большинстве случаев имеет возможность получить более полную, чем заказчик, информацию о влиянии внешних факторов на характеристики исследуемой системы и принимает на себя ответственность за сопутствующие им неточности. Поэтому все более возрастает требование об устранении такого рода неопределенностей при принятии решений.

Таким образом, общий подход к решению практических задач, использующий теорию принятия решений, должен включать некоторые новшества в мысленном процессе обработки информации. В то время как до сих пор ход принятия технического или экономического решения был у проектанта во многом произвольным, предлагаемая теория дает практику в руки критерии, руководящие им при выборе решения. Тем не менее, в этой книге для сохранения привычного инженерного способа мышления выкладки, основанные на теории принятия решений, даются не всегда в строгой математической последовательности. Обозначения и метод изложения приближены к взглядам инженера. При этом, конечно, значительный математический аппарат все же оказывается необходимым. Чтобы облегчить чтение книги, мы постарались свести к минимуму связи между различными ее разделами.

Центральную роль в рассмотрении проблемы принятия решений играет понятие риска. До сих пор инженеры относились к понятию риска резко отрицательно. Это можно объяснить тем, что в качестве основополагающего бытовало мнение, что в инженерном деле риск должен быть принципиально исключен. Однако более основательное рассмотрение вопроса заставляет прийти к выводу, что как раз в хозяйственной деятельности риск часто бывает неизбежным и должен учитываться. Поэтому было бы безответственным вообще закрывать глаза на существование риска вместо того, чтобы сознательно обратиться к решениям, включающим элементы риска.

Слово «риск» заимствовано из итальянского языка и означает «опасность», «угрозу». Первоначально оно применялось в коммерции, причем в нем противопоставлялись возможные потери при неудаче какого-либо сопряженного со случайностью предприятия и величина преследуемого им выигрыша. Затем в



связи с возможностью применения этого понятия в разнообразных ситуациях оно переключалось и в другие области. Точное определение понятия риска, пригодное для всех случаев, когда оно применяется, едва ли возможно ввиду их крайнего разнообразия. Мы предпочли бы, пожалуй, значение «ответственность за принятое решение», четко отмежевываясь при этом от того, что в обывденном языке называют «рискованным поведением, граничащим с авантюризмом». В соответствии с требованиями современной науки мы будем давать понятию риска различные, но непременно количественные определения. В первую очередь это относится к тем ситуациям, в которых принимаемые решения неизбежно связаны с риском и для которых задача заключается в том, чтобы свести этот риск к минимуму. Кроме того, при распространенности сопряженных с риском ситуаций может оказаться выгодным принимать некоторый допустимый риск, имея в виду повышение общего эффекта. Такой образ действий, естественно, следует использовать при всех возможных расчетах. Мы считаем принципиально необходимым не игнорировать наличие риска в инженерных областях, но осознанно минимизировать и учитывать его.

Каждый, кто интересуется проблемами принятия решений, обычно имеет собственный опыт в этих вопросах. При выборе порядка расположения глав в этой книге мы имели в виду читателя, который уже знаком с правилами принятия решений. Если же в этот материал станет вникать неподготовленный читатель, то может случиться так, что в разделах, сравнительно далеких от начала книги, он найдет то, с чем ему хотелось бы познакомиться в первую очередь. Ему мы советуем сразу после гл. 2 обратиться к гл. 9 и 10. Тот же, кто пожелает углубиться в проблему риска, должен начать с гл.11, после чего дополнительно изучить разделы 6.5 и 6.6.

Принципиальная структура процесса принятия решений часто бывает заслонена на практике многими специфическими деталями, и ее не всегда удается ясно вычлениить. Поэтому гл. 2 вводит простую формальную структуру и демонстрирует некоторые элементарные примеры, особенно подходящие для наглядного представления о таком важном случае, когда на решение влияют всего два неизвестных внешних фактора. Тем самым читатель получает предварительные сведения для того, чтобы в дальнейшем, в гл. 3 и 4, суметь применить рассматриваемые там критерии к различным приводимым примерам. Помимо этого, в гл. 3 и 4 он может узнать о границах их применимости, а также о возможных ошибках.

Гл. 5 возвращается к двумерному случаю, чтобы выявить общность и различия количественных критериев и показать, как от одного из них можно переходить к другому. Этот пере-

ход может быть предпринят по желанию расчетчика, если он хочет опереться на количественные характеристики ситуации, в которой принимается решение, как это представлено в гл. 6 (особенно в отношении доверительных факторов).

Как результат этого, в гл. 7 предлагается критерий принятия решений, адаптирующийся к подобным особенностям.

В то время как в перечисленных выше главах и разделах предпочтение отдается положениям, представляющим практический интерес, в дальнейшем внимание уделяется и соображениям, проливающим свет на перспективные концепции и употребительные методы.

В разд. 8.4 мы пытаемся обрабатывать субъективно полученные величины с помощью некоторого гибкого критерия принятия решения. Этот раздел носит предварительный характер.

Гл. 9 и 10 завершают рассмотрение проблемы принятия решений. Их надо иметь в виду при всяком дополнительном исследовании более или менее сложного решения.

Материалы гл. 11 еще раз обращают внимание на количественный подход к проблеме принятия решений.

Там, где результаты решения представляются векторами, актуальными оказываются многоцелевые решения. В настоящее время в этой области наблюдается заметное оживление исследований. Поэтому в гл. 12 излагаются лишь основные положения теории. Читатель, желающий подробнее изучить этот материал, должен обратиться к специальной литературе. То же самое относится и к гл. 13 с ее альтернативными методами.

По тематике настоящей книги имеется довольно обширная литература. Так, например, абстрактный математический анализ структур общей теории принятия решений читатель найдет у К. Эгле [1], где различные планы решений представлены с аксиоматической точки зрения. Дж. Сенгупта [2] исходит из модели линейной оптимизации и ориентируется в основном на экономические системы. Обе книги не затрагивают вопросы практического применения.

Учебниками вводного характера, предназначенными в основном для хозяйственных руководителей и снабженными простейшим математическим аппаратом, являются книги Х. Бюльмана, Х. Лёффеля и Э. Нивергельта [3], Ф. Фершля [4] и Г. Менгеса [5]. Простое, временами занимательное, но неизменно корректное с научной точки зрения изложение с примерами из производственной области содержит книга Х. Райффа [6]. В книге Х. Гирлиха [7] имеется написанное с математическим уклоном введение, где особое внимание обращено на теоретическую постановку вопроса. Надо иметь в виду, что понятие решения трактуется в науке по-разному. Так, Э. Шпеккер и Ф. Штрассен [8] исследуют математическое понятие «разрешимости».

---

## ОСНОВНАЯ ФОРМАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

---

### 2А. Матрица решений

Принятие решения представляет собой выбор одного из некоторого множества рассматриваемых вариантов:  $E_i \in E$ . В дальнейшем мы будем изучать наиболее часто встречающийся на практике случай, когда имеется лишь конечное число вариантов  $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_m$ , причем обычно небольшое, хотя принципиально мыслимо и бесконечное множество вариантов  $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ . При необходимости наше рассмотрение без труда переносится на этот наиболее общий случай.

Условимся прежде всего, что каждым вариантом  $E_i$  однозначно определяется некоторый результат  $e_i$ . Эти результаты должны допускать количественную оценку, и мы будем для простоты отождествлять эти оценки с соответствующими результатами, обозначая их одним и тем же символом  $e_i$ .

Мы ищем вариант с наибольшим значением результата, т. е. целью нашего выбора является  $\max_i e_i$ . При этом мы считаем, что оценки  $e_i$  характеризуют такие величины, как, например, выигрыш, полезность или надежность. Противоположную ситуацию с оценкой затрат или потерь можно исследовать точно так же путем минимизации оценки или, как это делается чаще, с помощью рассмотрения отрицательных величин полезности.

Таким образом, выбор оптимального варианта производится с помощью критерия

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i e_i\}. \quad (2.1)$$

Это правило выбора читается следующим образом: множество  $E_0$  оптимальных вариантов состоит из тех вариантов  $E_{i_0}$ , которые принадлежат множеству  $E$  всех вариантов и оценка  $e_{i_0}$  которых максимальна среди всех оценок  $e_i$ . (Логический знак  $\wedge$  читается как «и» и требует, чтобы оба связываемых им утверждения были истинны.)

Выбор оптимального варианта в соответствии с критерием (2.1) не является, вообще говоря, однозначным, поскольку максимальный результат  $\max_i e_i$  может достигаться в множестве

всех результатов многократно. Необходимость выбирать одно из нескольких одинаково хороших решений на практике обычно не создает дополнительных трудностей. Поэтому в дальнейшем мы лишь упоминаем об этой возможности, не занимаясь ею более подробно.

Только что рассмотренный случай принятия решений, при котором каждому варианту решения соответствует единственное внешнее состояние (и тем самым однозначно определяется единственный результат) и который мы называем случаем детерминированных решений, с точки зрения его практических применений является простейшим и весьма частным. Разумеется, такие элементарные структуры лежат в основании реальных процедур принятия решений. В более сложных структурах каждому допустимому варианту решения  $E_i$  вследствие различных внешних условий могут соответствовать различные внешние условия (состояния)  $F_j$  и результаты  $e_{ij}$  решений. Следующий пример иллюстрирует это положение.

Пусть из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными. Требуется решить, какие размеры должно иметь изделие из данного материала.

Варианты решений таковы:

$E_1$  — выбор размеров из соображений максимальной долговечности, т. е. изготовление изделия с минимальными затратами в предположении, что материал будет сохранять свои характеристики в течение длительного времени;

$E_m$  — выбор размеров в предположении минимальной долговечности;

$E_i$  — промежуточные решения.

Условия, требующие рассмотрения, таковы:

$F_1$  — условия, обеспечивающие максимальную долговечность;

$F_n$  — условия, обеспечивающие минимальную долговечность;

$F_j$  — промежуточные условия.

Под результатом решения  $e_{ij}$  здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту  $E_i$  и условиям  $F_j$  и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или надежность изделия. Обычно мы будем называть такой результат *полезностью решения*.

Семейство решений описывается некоторой матрицей (табл. 2.1). Увеличение объема семейства по сравнению с рассмотренной выше ситуацией детерминированных решений связано как с недостатком информации, так и с многообразием технических возможностей.

Конструктор и в этом случае старается выбрать решение с наилучшим результатом, но, так как ему неизвестно, с какими

Таблица 2.1. Матрица решений  $\|e_{ij}\|$ 

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	...	$F_j$	...	$F_n$
$E_1$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	...	$e_{1j}$	...	$e_{1n}$
$E_2$	$e_{21}$	$e_{22}$	$e_{23}$	...	$e_{2j}$	...	$e_{2n}$
$E_3$	$e_{31}$	$e_{32}$	$e_{33}$	...	$e_{3j}$	...	$e_{3n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$E_i$	$e_{i1}$	$e_{i2}$	$e_{i3}$	...	$e_{ij}$	...	$e_{in}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$E_m$	$e_{m1}$	$e_{m2}$	$e_{m3}$	...	$e_{mj}$	...	$e_{mn}$

условиями он столкнется, он вынужден принимать во внимание все оценки  $e_{ij}$ , соответствующие варианту  $E_i$ . Первоначальная задача максимизации  $\max_i e_i$  согласно критерию (2.1) должна быть теперь заменена другой, подходящим образом учитывающей все последствия любого из вариантов решения  $E_i$ .

## 2.2. Оценочная функция

Чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгоднейшему варианту решения даже в том случае, когда каким-то вариантам решений  $E_i$  могут соответствовать различные условия  $F_j$ , можно ввести подходящие оценочные (целевые) функции. При этом матрица решений  $\|e_{ij}\|$  сводится к одному столбцу. Каждому варианту  $E_i$  приписывается, таким образом, некоторый результат  $e_{ir}$ , характеризующий, в целом, все последствия этого решения. Такой результат мы будем в дальнейшем обозначать тем же символом  $e_{ir}$ .

Процедуру выбора можно теперь представить по аналогии с применением критерия (2.1). Возникает, однако, проблема, какой вложить смысл в результат  $e_{ir}$ . Если, например, последствия каждого из альтернативных решений характеризовать комбинацией из его наибольшего и наименьшего результатов, то можно принять

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \quad (2.2)$$

Из сказанного вытекает способ построения оценочных функций, приводимый в табл. 2.2. Наилучший в этом смысле резуль-

тат имеет вид

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}). \quad (2.3)$$

Теперь решение можно снова искать в соответствии с критерием (2.1). Формируя таким образом желаемый результат, конструктор исходит из компромисса между оптимистическим и пессимистическим подходами.

Рассмотрим теперь некоторые другие оценочные функции, которые в данном примере мог бы выбрать конструктор, а также соответствующие им исходные позиции.

Таблица 2.2. Построение оценочных функций

$E_1$	$e_{1r}$
$E_2$	$e_{2r}$
$E_3$	$e_{3r}$
$\vdots$	$\vdots$
$E_i$	$e_{ir}$
$\vdots$	$\vdots$
$E_m$	$e_{mr}$

Оптимистическая позиция:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\max_j e_{ij}). \quad (2.4)$$

Из матрицы результатов решений  $e_{ij}$  (табл. 2.1) выбирается вариант (строка), содержащий в качестве возможного следствия наибольший из всех возможных результатов. Наш конструктор становится на точку зрения азартного игрока. Он делает ставку на то, что выпадет наивыгоднейший случай, и исходя из этого выбирает размеры изделия.

Позиция нейтралитета:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij} \right). \quad (2.5)$$

Конструктор исходит из того, что все встречающиеся отклонения результата решения от «среднего» случая допустимы, и выбирает размеры, оптимальные с этой точки зрения.

Пессимистическая позиция:

$$\max_i e_{ir} = \max_i (\min_j e_{ij}). \quad (2.6)$$

Конструктор исходит из того, что надо ориентироваться на наи-

менее благоприятный случай и приписывает каждому из альтернативных вариантов наихудший из возможных результатов. После этого он выбирает самый выгодный вариант, т. е. ожидает наилучшего результата в наихудшем случае. Для каждого иного внешнего состояния результат может быть только равным этому или лучшим.

Позиция относительного пессимизма:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}). \quad (2.7)$$

Для каждого варианта решения конструктор оценивает потери в результате по сравнению с определенным по каждому варианту наилучшим результатом, а затем из совокупности наихудших результатов выбирает наилучший согласно представленной оценочной функции.

**Таблица 2.3.** Влияние вида оценочных функций на выбор размеров кабеля

$A$  — поперечное сечение провода;  $k$  — константа;  $S_{\max}$  и  $S_{\min}$  — максимальная и, соответственно, минимальная токовые нагрузки

Уравнение	Оценочная функция	Результат
(2.6)	$\max_i \min_j e_{ij}$	$A = k S_{\max}$
(2.5)	$\max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{ij}$	$A = k \sqrt{\frac{1}{3} (S_{\max}^2 + S_{\max} S_{\min} + S_{\min}^2)}$
(2.7)	$\min_i \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$	$A = k \sqrt{S_{\max} S_{\min}}$
(2.4)	$\max_i \max_j e_{ij}$	$A = k S_{\min}$

Ряд таких оценочных функций можно было бы продолжить. Некоторые из них получили широкое распространение в хозяйственной деятельности. Так, если условия эксплуатации заранее не известны, ориентируются обычно на наименее благоприятную ситуацию. Это соответствует оценочной функции (2.6). Нередко используются также функции (2.5) и (2.7). Оценочная функция (2.4) до сего времени в технических приложениях не применялась.

В табл. 2.3 показан пример выбора сечения  $A$  кабеля при неизвестной токовой нагрузке  $S$  с использованием всех четырех вышеназванных оценочных функций. Обоснование результатов,

приведенных в последнем столбце, читатель найдет в работе [9], причем константа  $k$  здесь одна и та же для всех четырех случаев. Отметим, что результаты зависят только от  $S_{\max}$  и  $S_{\min}$ , т. е. от максимальной и минимальной токовых нагрузок.

Приведенные результаты существенно различаются. Они упорядочены таким образом, что влияние минимальной токовой нагрузки  $S_{\min}$  нарастает от строки к строке, т. е. получающиеся сечения становятся все меньше и меньше. Решение при этом становится все более оптимистичным. При этом выбор критерия определяется исключительно позицией конструктора. Поясним эти положения.

Влияние исходной позиции конструктора на эффективность результата решения можно интерпретировать, исходя из наглядных представлений. Простейшим здесь является графическое изображение на плоскости, для чего мы временно ограничимся случаем с двумя ( $n=2$ ) внешними состояниями при  $m$  вариантах решения. Полезно, разумеется, чтобы читатель уяснил для себя и, руководствуясь дальнейшими построениями, рассмотрел самостоятельно, как обобщается изложенное на случай большего, чем два, числа состояний, особенно на случай  $n=3$ , графически труднее представимый, но хорошо интерпретируемый в пространстве.

Введем теперь прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата решения  $e_{i1}$ , соответствующие внешнему состоянию  $F_1$ , а по оси ординат — значения  $e_{i2}$ , соответствующие состоянию  $F_2$ ,  $i=1, \dots, m$ . В этом случае каждый вариант решения  $E_i$  соответствует точке  $(e_{i1}, e_{i2})$ ,  $i=1, \dots, m$ , на плоскости. Точку с координатами  $(\max_i e_{i1}, \max_i e_{i2})$  мы назовем утопической точкой (УТ). Смысл этого названия в том, что координаты всех точек  $(e_{i1}, e_{i2})$ ,  $i=1, \dots, m$ , соответствующих вариантам решений  $E_1, \dots, E_m$ , не могут быть больше, чем у точки УТ, и что УТ встречается среди этих  $m$  точек только в том редком, идеальном случае, когда существует вариант решения, дающий максимальный результат для каждого из (двух) возможных внешних состояний. Аналогичное значение имеет и так называемая антиутопическая точка (АУТ), имеющая координаты  $(\min_i e_{i1}, \min_i e_{i2})$ : координаты всех точек  $(e_{i1}, e_{i2})$ ,  $i=1, \dots, m$ , соответствующих вариантам решений  $E_1, \dots, E_m$ , не могут быть меньше, чем у точки АУТ. Отсюда следует, что все  $m$  точек  $(e_{i1}, e_{i2})$ ,  $i=1, \dots, m$ , лежат внутри прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям, а противоположные вершины суть точки УТ и АУТ; мы называем этот прямоугольник *полем полезности решений* (рис. 2.1).



Теперь, чтобы сравнить варианты решений с точки зрения их качества, назовем вариант  $E_i$  не худшим, чем вариант  $E_j$ , если для соответствующих точек  $(e_{i1}, e_{i2})$  и  $(e_{j1}, e_{j2})$  выполняются неравенства  $e_{i1} \geq e_{j1}$  и  $e_{i2} \geq e_{j2}$ , причем  $E_i$  считается лучшим, чем  $E_j$ , если хотя бы одно из этих двух неравенств является строгим.

Очевидно, что при таком определении не любые два варианта решений допускают сравнение в том смысле, что один из них оказывается лучше другого. (Может случиться, что для точек  $(e_{i1}, e_{i2})$  и  $(e_{j1}, e_{j2})$ , соответствующих вариантам  $E_i$  и  $E_j$ ,

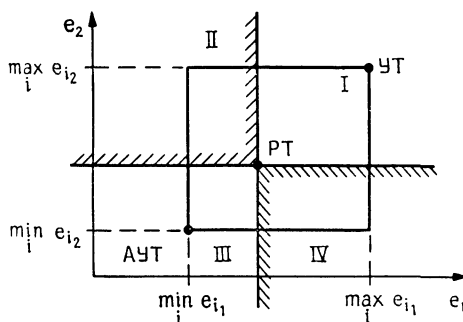


Рис. 2.1. Поле выбора решений.

выполняются, например, неравенства  $e_{i1} > e_{j1}$  и  $e_{i2} < e_{j2}$ .) На математическом языке это означает, что на множестве вариантов решений установлено так называемое отношение *частичного порядка*. Это отношение частичного порядка обладает рядом свойств, хорошо усматриваемых на рис. 2.1. Выберем в поле полезности произвольную точку, которую будем называть рассматриваемой (РТ). С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III и IV. В рассматриваемом нами двумерном случае каждая из этих частей имеет вид (бесконечного) прямоугольника; в случае произвольной размерности они превращаются в так называемые *конусы*.

Рассматривая положение точек поля полезности относительно этих четырех конусов, можно в общем случае сказать следующее. Все точки из конуса I в смысле введенного выше частичного порядка лучше, чем рассматриваемая точка РТ. Поэтому мы называем конус I *конусом предпочтения*. Соответственно все точки из конуса III хуже точки РТ, и мы будем называть область III *антиконусом*. Таким образом, оценка качества точек из этих двух конусов в сравнении с точкой РТ проста и однозначна. Оценка же точек в отмеченных штриховкой

конусах II и IV является неопределенной, вследствие чего их называют *областями неопределенности*. Для этих точек оценка получается только с помощью выбранного критерия принятия решения. В случае  $m$  вариантов решений  $E_1, \dots, E_m$  и  $n$  внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$  критерий принятия решения можно представить в виде

$$\max K(e_{i1}, \dots, e_{in}) \\ i=1, \dots, m$$

или

$$\min K(e_{i1}, \dots, e_{in}). \\ i=1, \dots, m$$

Функция  $n$  переменных  $K$  характеризует соответствующий критерий и задает одновременно оценочную функцию. Для анализа критерия рассмотрим, полагая  $e_{i1}=x_1, e_{i2}=x_2, \dots, e_{in}=x_n$ , функцию  $K$  на всем  $n$ -мерном пространстве  $R^n$ . Тогда каждому значению действительного параметра  $k$  посредством равенства

$$K(x_1, \dots, x_n) = k$$

ставится в соответствие некоторая гиперповерхность в пространстве  $R^n$ , называемая нами *поверхностью уровня*, соответствующей значению  $k$ . В двумерном случае, интересующем нас ввиду его наглядности, мы специально полагаем  $e_{i1}=x_1=u$  и  $e_{i2}=x_2=v$ , отождествляя тем самым  $e_{i1}$ -ось с  $u$ -осью, а  $e_{i2}$ -ось с  $v$ -осью, и с помощью равенства

$$K(u, v) = k$$

получаем в этом случае на плоскости  $(u, v)$  кривую, называемую *линией уровня*, соответствующей значению  $k$ . При фиксированном уровне  $k$  уравнение  $K(u, v) = k$  определяет функциональную зависимость между переменными  $u$  и  $v$ , называемую *функцией предпочтения*; допуская терминологическую вольность, так же называют и соответствующую кривую на плоскости  $(u, v)$ .

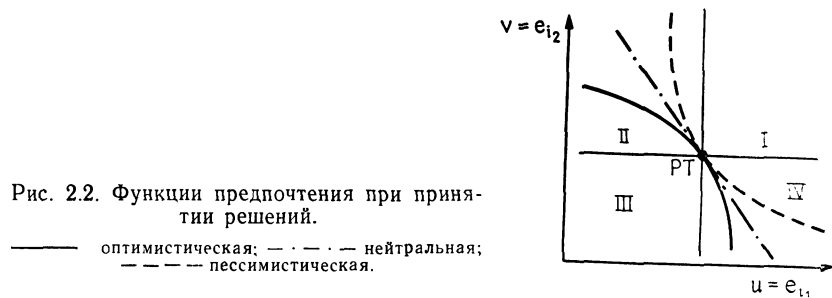
Рассмотрим, например, оценочную функцию (2.5). При  $e_{i1}=u$  и  $e_{i2}=v$  получаем для  $m=2$  семейство функций предпочтения, зависящих от параметра  $k$ :

$$(u+v)/n = k.$$

При графическом изображении это выражение дает прямые, параллельные биссектрисе второго и четвертого квадрантов плоскости  $(u, v)$ . Поскольку рассматриваемому критерию, в соответствии с которым путем оптимального выбора решения максимизируется среднее значение всех возможных результа-

тов, отвечает нейтральная в известном смысле позиция принимающего решение, мы приписываем название «нейтральной» и соответствующей функции предпочтения (рис. 2.2). Выберем теперь на какой-либо линии уровня этого критерия произвольную точку РТ и проведем через нее «осевой крест», разбивающий плоскость на описанные выше четыре квадранта — конус предпочтения, антиконус и конусы неопределенности.

Все точки из областей неопределенности, лежащие справа и выше этой линии уровня, в смысле нашего критерия лучше точек, лежащих слева и ниже. Сказанное справедливо и для



функций предпочтения любого другого критерия. Всякая функция (кривая) предпочтения объединяет все точки фиксированного уровня; справа и выше ее располагаются все лучшие точки, т. е. точки более высокого уровня, а слева и ниже — худшие, т. е. точки более низкого уровня\*). Если на основе какого-либо критерия получается кривая предпочтения типа штриховой (рис. 2.2), то мы называем такую кривую вогнутой, подразумевая под этим, что в соответствующих ей областях неопределенности имеется меньшее число лучших точек, чем при нейтральном критерии (2.5). Отметим, что такая вогнутая кривая предпочтения характеризует пессимистическую исходную позицию. Кривые предпочтения типа сплошной на рис. 2.2 соответствуют оптимистическому подходу, поскольку на этот раз в сравнении с нейтральным критерием больше точек из областей неопределенности принадлежит к числу лучших; мы называем такие кривые выпуклыми. Предельный случай пессимистического подхода образуют, очевидно, граничные прямые квадран-

\* Это утверждение авторов неточно. Нетрудно заметить, что лучшие точки располагаются справа и выше кривой предпочтения вовсе не для любого критерия оптимальности. Так, замена функции  $K$  на  $-K$  переносит «лучшие» точки в противоположную полуплоскость. К тому же кривая предпочтения может располагаться так, что выражение «справа и выше» не имеет для нее смысла (даже локально). — *Прим. перев.*

та I, а оптимистического — граничные прямые квадранта III, и чем ближе подходит кривая предпочтения к этим граничным прямым, тем в большей степени соответствующий критерий представляет пессимистическую или, соответственно, оптимистическую точку зрения. Если выбор оценочной функции отдается на усмотрение лица, принимающего решение, то, как показывают табл. 2.3 и рис. 2.2, приходится считаться с возможностью различных результатов для одного и того же решения. Таким образом, принятие решения не есть чисто рациональный процесс. Опасность возникает в тех случаях, когда оценочные функции выбираются интуитивно, иногда даже без выяснения исходной позиции принимающего решение.

Всякое техническое или экономическое решение в условиях неполной информации — сознательно или неосознанно — принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией описанного выше типа. Как только это бывает признано явно, следствия соответствующих решений становятся лучше обозримыми, что позволяет улучшить их качество. При этом выбор оценочных функций всегда должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения.

Таблица 2.4.  $(m \times 2)$ -матрица решений

$F$ $E$		
	$F_1$	$F_2$
$E_1$	$e_{11}$	$e_{12}$
$E_2$	$e_{21}$	$e_{22}$
$E_3$	$e_{31}$	$e_{32}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_i$	$e_{i1}$	$e_{i2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$E_m$	$e_{m1}$	$e_{m2}$

Таблица 2.5. Фатальная ситуация в принятии решений

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	...	$F_j$	...	$F_n$
$E_1$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$	...	$e_{1j}$	...	$e_{1n}$

### 2.3. Особые случаи

Схематическое сопоставление всех возможных полезностей  $e_{ij}$  различных решений в матрице табл. 2.1 облегчает поначалу их обозрение, не требуя при этом формальной оценки. Эта матрица может быть меньшего объема (табл. 2.4) и даже выродиться в единственный столбец, если будет представлена полная информация о том, с каким внешним состоянием  $F_j$  следует считаться. Это соответствует элементарному сравнению различных технических решений. Матрица решений может, однако, свестись и к единственной строке (табл. 2.5). В этом случае мы имеем дело с так называемой фатальной ситуацией принятия решений, когда в силу ограничений технического характера, внешних условий и других причин остается единственный вариант  $E_i$ , хотя его дальнейшие последствия зависят от внешнего состояния  $F_j$ , и поэтому результат решения оказывается неизвестным.

Случается и так, что некоторый вариант решения, например  $E_k$ , оказывается настолько удачным, что для другого варианта  $E_l$  из матрицы решений выполняются неравенства  $e_{kj} \geq e_{lj}$  для  $j=1, \dots, n$ . Тогда говорят, что вариант  $E_k$  доминирует над вариантом  $E_l$ . Вариант  $E_k$  в этом случае с самого начала оказывается лучшим, а вариант  $E_l$ , напротив, не представляет далее интереса. Более подробно понятие доминирования будет рассмотрено в конце разд. 3.5.

Ради возможности графической интерпретации вернемся еще раз к решениям с двумя только внешними состояниями  $F_1$  и  $F_2$ . Все варианты, доминирующие над точкой РТ, лежат на рис. 2.1 в конусе предпочтения (т. е. в I квадранте), а варианты, над которыми РТ доминирует, расположены в антиконусе (в III квадранте). Следовательно, для формального оценивания остаются точки из II и IV квадрантов, первоначально названных областями неопределенности. Этими областями мы займемся в следующей главе. В этих квадрантах будут найдены варианты, оптимальные в смысле различных критериев, и даны их количественные оценки. Для этого соответствующие функции предпочтения должны быть в обеих областях разумным образом упорядочены.

## КЛАССИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

### 3.1. Минимаксный критерий

Минимаксный критерий (ММ) [10] использует оценочную функцию (2.6), соответствующую позиции крайней осторожности.

При

$$Z_{MM} = \max_i e_{ir} \quad (3.1)$$

и

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} \quad (3.2)$$

справедливо соотношение

$$E_0 = \{E_{i0} | E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij}\}, \quad (3.3)$$

где  $Z_{MM}$  — оценочная функция ММ-критерия.

Поскольку в области технических задач построение множества  $E$  вариантов уже само по себе требует весьма значительных усилий, причем иногда возникает необходимость в их рассмотрении с различных точек зрения, условие  $E_{j0} \in E$  включается во все критерии. Оно должно напоминать о том, что совокупность вариантов необходимо исследовать возможно более полным образом, чтобы была обеспечена оптимальность выбранного варианта.

Правило выбора решения в соответствии с ММ-критерием можно интерпретировать следующим образом:

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется еще одним столбцом из наименьших результатов  $e_{ir}$  каждой строки. Выбрать надлежит те варианты  $E_{i0}$ , в строках которых стоят наибольшие значения  $e_{ir}$  этого столбца.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия  $F_j$  ни встретились, соответствующий результат не может оказаться ниже  $Z_{MM}$ . Это свойство заставляет считать минимаксный критерий одним из фундаментальных. Поэтому в технических задачах он применяется чаще все-

го, как сознательно, так и неосознанно. Однако положение об отсутствии риска стоит различных потерь. Продemonстрируем это на небольшом примере (табл. 3.1).

Хотя вариант  $E_1$  кажется издали более выгодным, согласно ММ-критерию оптимальным следует считать  $E_0 = \{E_2\}$ . Принятие решения по этому критерию может, однако, оказаться еще менее разумным, если

- состояние  $F_2$  встречается чаще, чем состояние  $F_1$ , и
- решение реализуется многократно.

Таблица 3.1. Пример вариантов решения без учета риска

	$F_1$	$F_2$	$e_{ir}$	$\max_i e_{ir}$
$E_1$	1	100	1	
$E_2$	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1

Выбирая вариант  $E_2$ , предписываемый ММ-критерием, мы, правда, избегаем неудачного значения 1, реализующегося в варианте  $E_1$  при внешнем состоянии  $F_1$ , получая вместо него при этом состоянии немного лучший результат 1, 1, зато в состоянии  $F_2$  теряем выигрыш 100, получая всего только 1, 1. Этот пример показывает, что в многочисленных практических ситуациях пессимизм минимаксного критерия может оказаться очень невыгодным.

Применение ММ-критерия бывает оправданно, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о возможности появления внешних состояний  $F_j$  ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний  $F_j$ ;
- решение реализуется лишь один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск, т. е. ни при каких условиях  $F_j$  не допускается получать результат, меньший, чем  $Z_{\text{мм}}$ .

Более обстоятельно проблема риска, связанного с принятием решений, рассматривается в разд. 6.5.

### 3.2. Критерий Байеса — Лапласа

При построении оценочной функции  $Z_{\text{мм}}$  (согласно ММ-критерию) каждый вариант  $E_i$  представлен лишь одним из своих результатов  $e_{ir} = \min e_{ij}$ . Критерий Байеса — Лапласа (BL), напротив, учитывает каждое из возможных следствий.

Пусть  $q_j$  — вероятность появления внешнего состояния  $F_j$ ; тогда для BL-критерия

$$Z_{BL} = \max_i e_{ir}, \quad (3.4)$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j, \quad (3.5)$$

$$E_0 = \{E_{i0} | E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^n q_j = 1\}. \quad (3.6)$$

Соответствующее правило выбора можно интерпретировать следующим образом:

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется еще одним столбцом, содержащим математическое ожидание значений каждой из строк. Выбираются те варианты  $E_{i0}$ , в строках которых стоит наибольшее значение  $e_{ir}$  этого столбца.

При этом предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний  $F_j$  известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключен.

Исходная позиция применяющего BL-критерий оптимистичнее, чем в случае ММ-критерия, однако она предполагает более высокий уровень информированности и достаточно длинные реализации.

### 3.3. Критерий Сэвиджа

Рассмотрим более подробно критерий Сэвиджа [11], введенный выше соотношением (2.7). С помощью обозначений

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \quad (3.7)$$

и

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}) \quad (3.8)$$



формируется оценочная функция

$$Z_s = \min_i e_{ir} = \min_i [\max_j (\max_t e_{ij} - e_{ij})] \quad (3.9)$$

и строится множество оптимальных вариантов решения

$$E_0 = \{E_{i0} | E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir}\}. \quad (3.10)$$

Для понимания этого критерия определяемую соотношением (3.7) величину  $a_{ij} = \max_t e_{ij} - e_{ij}$  можно трактовать как максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если в состоянии  $F_j$  вместо варианта  $E_i$  выбрать другой, оптимальный для этого внешнего состояния вариант. Мы можем, однако, интерпретировать  $a_{ij}$  и как потери (штрафы), возникающие в состоянии  $F_j$  при замене оптимального для него варианта на вариант  $E_i$ . Тогда определяемая соотношением (3.8) величина  $e_{ir}$  представляет собой — при интерпретации  $a_{ij}$  в качестве потерь — максимальные возможные (по всем внешним состояниям  $F_j$ ,  $j=1, \dots, n$ ) потери в случае выбора варианта  $E_i$ . Теперь, согласно (3.9) и (3.10), эти максимально возможные потери минимизируются за счет выбора подходящего варианта  $E_i$ .

Соответствующее S-критерию правило выбора теперь интерпретируется так:

Каждый элемент матрицы решений  $\|e_{ij}\|$  вычитается из наибольшего результата  $\max_i e_{ij}$  соответствующего столбца.

Разности  $a_{ij}$  образуют матрицу остатков  $\|a_{ij}\|$ . Эта матрица дополняется столбцом наибольших разностей  $e_{ir}$ . Выбираются те варианты  $E_{i0}$ , в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение.

По выражению (3.9) оценивается значение результатов тех состояний, которые, вследствие выбора соответствующего распределения вероятностей, оказывают одинаковое влияние на решение. С точки зрения результатов матрицы  $\|e_{ij}\|$  S-критерий связан с риском, однако, с позиций матрицы  $\|a_{ij}\|$ , он от риска свободен. В остальном к ситуации принятия решений предъявляются те же требования, что и в случае ММ-критерия.

### 3.4. Расширенный минимаксный критерий

Рассмотрим в заключение еще один метод, допускающий интерпретацию в качестве расширенного минимаксного критерия. В нем используются простейшие понятия теории вероятно-

стей, а также, в известном смысле, теории игр. Читатель может, однако, при первом чтении пропустить этот раздел, поскольку в технических приложениях этот критерий до сего времени применяется мало.

Основным здесь является предположение о том, что каждому из  $n$  возможных внешних состояний  $F_j$  приписана вероятность его появления  $q_j$ :  $0 < q_j < 1$ ,  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ .

Сформируем из  $n$  вероятностей  $q_j$  вектор  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  и обозначим через  $W^{(n)}$  множество всех  $n$ -мерных вероятностных векторов. Выбор какого-либо варианта решения  $E_i$  приводит при достаточно долгом применении  $E_i$  к среднему результату  $\sum_{j=1}^n e_{ij}q_j$ . Если же теперь случайным образом с распределением вероятностей  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in W^{(m)}$  смешать  $m$  вариантов решений  $E_i$ , то в результате получим среднее значение

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_{ij} p_i q_j.$$

В реальной ситуации вектор  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , относящийся к состояниям  $F_j$ , бывает, как правило, неизвестен. Ориентируясь применительно к значению  $e(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  на наименее выгодное распределение  $\mathbf{q}$  состояний  $F_j$  и добиваясь, с другой стороны, максимального увеличения  $e(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  за счет выбора наиболее удачного распределения  $\mathbf{p}$  вариантов решения  $E_i$ , получают в результате значение, соответствующее расширенному ММ-критерию.

Обозначим теперь через  $E(\mathbf{p})$  обобщенный вариант решения, определяемый с помощью выбора вероятностного вектора  $\mathbf{p} \in W^{(m)}$ , а через  $\tilde{E}$  — множество всех таких вариантов.

Тогда расширенный ММ-критерий формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}_0) &= \{E(\mathbf{p}_0) \mid E(\mathbf{p}_0) \in \tilde{E} \wedge e(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = \\ &= \max_{\mathbf{p}} \min_{\mathbf{q}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n e_{ij} p_i q_j\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\mathbf{p}$  — вероятностный вектор для  $E_i$ , а  $\mathbf{q}$  — вероятностный вектор для  $F_j$ .

Таким образом, расширенный ММ-критерий задается целью найти наилучшее распределение вероятностей на множестве вариантов  $E_i$ , когда в многократно воспроизводящейся ситуации ничего не известно о вероятностях состояний  $F_j$ . Поэтому предполагается, что  $F_j$  распределены наименее выгодным образом.

### 3.5. Применение классических критериев

Из требований, предъявляемых рассмотренными критериями к анализируемой ситуации, становится ясно, что вследствие их жестких исходных позиций они применимы только для идеализированных практических решений. В случаях, когда требуется слишком сильная идеализация, можно одновременно применять поочередно различные критерии. После этого среди нескольких вариантов, отобранных таким образом в качестве оптимальных, приходится все-таки волевым образом выделять некоторое окончательное решение [12]. Такой подход позволяет, во-первых, лучше проникнуть во все внутренние связи проблемы принятия решений и, во-вторых, ослабляет влияние субъективного фактора.

Выбор решения по классическим критериям проиллюстрируем следующим примером.

Пусть некоторую машину (технологическую установку, конвейер, станок и т. п.) требуется подвергнуть проверке с приостановкой, естественно, ее эксплуатации. Из-за этого приостанавливается выпуск продукции. Если же эксплуатации машины помешает не обнаруженная своевременно неисправность, то это приведет не только к приостановке работы, но и дополнительно к поломке.

Варианты решения таковы:

$E_1$  — полная проверка;

$E_2$  — минимальная проверка;

$E_3$  — отказ от проверки.

Машина может находиться в следующих состояниях:

$F_1$  — неисправностей нет;

$F_2$  — имеется незначительная неисправность;

$F_3$  — имеется серьезная неисправность.

Результаты включают затраты на проверки и устранение неисправности, а также затраты, связанные с потерями в продук-

Таблица 3.2. Варианты решения о проверках машины и их оценки (в  $10^3$ ) согласно ММ- и ВЛ-критериям для  $q_j = 0,33$

				ММ-критерий		ВЛ-критерий	
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$e_{ir} = \min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$	$e_{ir} = \sum_j e_{ij} q_j$	$\max_i e_{ir}$
$E_1$	—20,0	—22,0	—25,0	—25,0	<u>—25,0</u>	—22,33	
$E_2$	—14,0	—23,0	—31,0	—31,0		—22,67	
$E_3$	0	—24,0	—40,0	—40,0		—21,33	<u>—21,33</u>

ции и с поломкой. Они приведены в табл. 3.2. Согласно ММ-критерию (3.3), следует проводить полную проверку ( $E_0 = \{E_1\}$ ). ВЛ-критерий в предположении, что все состояния машины равновероятны ( $q_j = 0,33$ ), рекомендует отказаться от проверки ( $E_0 = \{E_1\}$ ). Табл. 3.3 иллюстрирует применение S-критерия. Им в качестве оптимальной рекомендуется минимальная проверка.

Наш пример сознательно выбран так, что каждый критерий предлагает новое решение. Неопределенность состояния, в котором проверка застает машину, превращается теперь в отсутствие ясности, какому же критерию следовать. Таким образом, мы вроде бы мало что выиграли. Самое большее, можно было

Таблица 3.3. Матрица остатков для примера «Решения о проверках машины» и их оценка (в  $10^3$ ) согласно S-критерию

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	S-критерий	
				$e_{ir} = \max_j a_{ij}$	$\min_i e_{ir}$
$E_1$	+20,0	0	0	+20,0	
$E_2$	+14,0	+1,0	+6,0	+14,0	<u>+14,0</u>
$E_3$	0	+2,0	+15,0	+15,0	

бы проверить после этого, не принимают ли величины  $e_{ir}$  для какого-нибудь критерия приблизительно равные значения, как, например,  $e_{2r} = 14,0 \cdot 10^3$  и  $e_{3r} = 15,0 \cdot 10^3$  в табл. 3.3; рекомендации такого критерия выглядят менее убедительными. Поскольку различные критерии связаны с различными же аспектами ситуации, в которой принимается решение, лучше всего для сравнительной оценки рекомендаций тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. Если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то целесообразно придерживаться ВЛ-критерия. Если же число реализаций невелико, то больший вес приобретают более осторожные рекомендации S- или ММ-критериев.

В области технических задач различные критерии часто приводят к одному результату. Предположим, что в рассматриваемом примере серьезная неисправность (состояние  $F_3$ ) встречается вдвое чаще, чем любое другое состояние ( $q_1 = q_2$ ;  $q_3 = 0,5$ ); тогда ВЛ-критерий, как и ММ-критерий, рекомендует полную проверку ( $E_0 = \{E_1\}$ ).

Бывают и такие ситуации, когда все критерии дают одинаковые результаты. Если для нашего примера (табл. 3.2) с по-

мощью соответствующих мероприятий удастся так снизить затраты на полную проверку, что в соответствующей строке мы будем иметь  $e_{11} = -18,0 \cdot 10^3$ ,  $e_{12} = -20,0 \cdot 10^3$  и  $e_{13} = -22,0 \cdot 10^3$ , то все три применявшихся критерия предпишут полную проверку.

Всякий вариант, избираемый в данном случае всеми рассмотренными критериями, является слабо доминирующим. Сильное доминирование имеет место, когда для всех результатов  $e_{1j}$  одного из рассматриваемых вариантов справедливо

$$\begin{aligned} e_{1j} &\leq e_{ij} && \text{для } j=1, \dots, n \text{ и} \\ e_{1j} &< e_{ij} && \text{хотя бы для одного } j. \end{aligned}$$

Над указанным вариантом  $E_1$  остальные варианты доминируют. Его можно исключить из матрицы решений, так как для всякого  $F_j$  он дает худший результат, чем другие.

Если какой-либо вариант  $E_1$  доминирует сильно, т. е. выполняются условия

$$\begin{aligned} e_{1j} &\geq e_{ij} && \text{для всех } j=1, \dots, n \text{ и} \\ e_{1j} &> e_{ij} && \text{хотя бы для одного } j, \end{aligned}$$

то даже при отсутствии информации о возможных внешних состояниях  $F_j$  никакой проблемы относительно принимаемого решения нет. Для всякого  $F_j$  вариант  $E_1$  — наилучший.

---

## ПРОИЗВОДНЫЕ КРИТЕРИИ

---

### 4.1. Критерий Гурвица

Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, Гурвиц [13] предложил критерий (HW), оценочная функция которого находится где-то между точками зрения предельного оптимизма (2.4) и крайнего пессимизма (2.6):

$$Z_{HW} = \max_i e_{ir}, \quad (4.1)$$

$$e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1 - c) \max_j e_{ij}. \quad (4.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_0 &= \{E_{i0} | E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \\ &= \max_i [c \min_j e_{ij} + (1 - c) \max_j e_{ij}] \wedge 0 \leq c \leq 1\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $c$  — весовой множитель.

Правило выбора согласно HW-критерию формулируется нами следующим образом:

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется столбцом, содержащим средние взвешенные наименьшего и наибольшего результатов для каждой строки (4.2). Выбираются те варианты  $E_{i0}$ , в строках которых стоят наибольшие элементы  $e_{ir}$  этого столбца.

Для  $c=1$  HW-критерий превращается в ММ-критерий. Для  $c=0$  он превращается в критерий азартного игрока. Отсюда ясно, какое значение имеет весовой множитель  $c$ . В технических приложениях правильно выбрать этот множитель бывает так же трудно, как правильно выбрать критерий. Вряд ли возможно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего весовой множитель  $c=0,5$  без возражений принимается в качестве некоторой «средней» точки зрения. При обосновании выбора применяют обратный порядок действий. Для приглянувшегося решения вычисляется весовой множитель  $c$ , и он интерпретируется как показатель соотношения оптимизма и пессимизма. Таким образом, позиции, исходя

из которых принимаются решения, можно рассортировать по крайней мере задним числом.

В табл. 4.1 представлена матрица решений, из которой хорошо видно, что выбор в соответствии с НВ-критерием может, несмотря на вполне уравновешенную точку зрения, приводить к нерациональным решениям. Пример построен так, что оптимальное (согласно НВ-критерию) решение  $E_0$  есть  $E_1$  независимо от весового множителя.

Таблица 4.1. Пример матрицы решений в соответствии с НВ-критерием

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	...	$F_{n-1}$	$F_n$
$E_1$	10 000	1	1	1	...	1	1
$E_2$	9999	9999	9999	9999	...	9999	0,99

НВ-критерий предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- о вероятностях появления состояний  $F_j$  ничего не известно;
- с появлением состояний  $F_j$  необходимо считаться;
- реализуется лишь малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

## 4.2. Критерий Ходжа-Лемана

Критерий Ходжа — Лемана (HL) [14] опирается одновременно на ММ-критерий (3.3) и ВЛ-критерий (3.6). С помощью параметра  $v$  выражается степень доверия к используемому распределению вероятностей. Если это доверие велико, то акцентируется ВЛ-критерий, в противном случае предпочтение отдается ММ-критерию.

Оценочная функция определяется равенством

$$Z_{HL} = \max_i e_{ir}, \quad (4.4)$$

$$e_{ir} = v \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j + (1 - v) \min_j e_{ij}, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad (4.5)$$

а множество HL-оптимальных решений записывается в виде

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i [v \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j + (1 - v) \min_j e_{ij}] \wedge 0 \leq v \leq 1\}. \quad (4.6)$$

Правило выбора, соответствующее HL-критерию, формулируется следующим образом:

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется столбцом, составленным из средних взвешенных (с постоянными весами) математического ожидания и наименьшего результата каждой строки (4.5). Отбираются те варианты решений  $E_{i0}$ , в строках которых стоит наибольшее значение этого столбца.

Для  $v=1$  HL-критерий переходит в VL-критерий, а для  $v=0$  превращается в MM-критерий.

Степень уверенности в какой-либо функции распределения практически не поддается оценке. Сам критерий тоже не дает для этого точки опоры. Таким образом, выбор параметра  $v$  подвержен влиянию субъективизма. Кроме того, без внимания остается и число реализаций. Поэтому HL-критерий не применяется при принятии технических решений.

Следующие свойства ситуации, в которой принимается решение, предполагаются рассматриваемым критерием:

- вероятности появления состояний  $F_j$  неизвестны, но некоторые предположения о распределениях вероятностей возможны;
- принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
- при малых числах реализаций допускается некоторый риск.

### 4.3. Критерий Гермейера

Отправляясь от подхода Гермейера [15] к отысканию эффективных и пригодных к компромиссу решений в области полиоптимизации — т. е. всех решений, которые не считаются заведомо худшими, чем другие, — можно предложить еще один критерий [16], обладающий в некотором отношении определенной эластичностью. Он с самого начала ориентирован на величины потерь, т. е. на отрицательные значения всех  $e_{ij}$ .

В качестве оценочной функции выступает

$$Z_0 = \max_i e_{ir}, \quad (4.7)$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j. \quad (4.8)$$

Сам критерий гласит, таким образом,

$$E_0 = \{E_{i0} | E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} 0\}. \quad (4.9)$$



Поскольку в хозяйственных задачах преимущественно имеют дело с ценами и затратами, условие  $e_{ij} < 0$  обычно выполняется. В случае же, когда среди величин  $e_{ij}$  встречаются и положительные значения, можно перейти к строго отрицательным значениям с помощью преобразования  $e_{ij} - a$  при подходящим образом подобранном  $a > 0$ . (Следует, однако, иметь в виду, что оптимальный вариант решения зависит от  $a$ .)

Правило выбора согласно критерию Гермейера (G) формулируется теперь следующим образом:

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется еще одним столбцом, содержащим в каждой строке наименьшее произведение имеющегося в ней результата на вероятность соответствующего состояния  $F_j$ . Выбираются те варианты  $E_{i0}$ , в строках которых находится наибольшее значение  $e_{ir}$  этого столбца.

В известном отношении G-критерий обобщает ММ-критерий. В случае равномерного распределения  $q_j = 1/n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , они становятся идентичными.

Условия его применимости таковы:

- вероятности появления состояний  $F_j$  известны;
- с появлением тех или иных состояний, отдельно или в комплексе, необходимо считаться;
- допускается некоторый риск;
- решение может реализоваться один или много раз.

Если функция распределения известна не очень надежно, а числа реализаций малы, то, следуя G-критерию, получают, вообще говоря, неоправданно большой риск. Таким образом, здесь остается некоторая свобода для субъективных действий.

#### 4.4. BL (ММ)-критерий

Стремление получить критерии, которые бы лучше приспособлялись к имеющейся ситуации, чем все до сих пор рассмотренные, привело к построению так называемых составных критериев. В качестве примера критериев, сформированных с этой целью, приведем критерий IV из работы [17].

Исходным для построенного был BL-критерий [см. (3.4) и (3.5)]. Вследствие того, что распределение  $q = (q_1, \dots, q_n)$  устанавливается эмпирически и потому известно неточно, происходит, с одной стороны, ослабление критерия, а с другой, напротив, с помощью заданных границ для риска и посредством ММ-критерия [см. (3.1) и (3.2)] обеспечивается соответствующая свобода действий. Точные формулировки состоят в следующем.

Зафиксируем прежде всего задаваемое ММ-критерием опорное значение:

$$Z_{\text{ММ}} = \max_i \min_j e_{ij} = e_{i_0 j_0},$$

где  $i_0$  и  $j_0$  — оптимизирующие индексы для рассматриваемых вариантов решений и, соответственно, состояний.

Посредством некоторого заданного или выбираемого уровня допустимого риска  $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$  определим некоторое множество состояний, являющееся подмножеством множества индексов  $\{1, \dots, m\}$ :

$$I_1 = \{i | i \in \{1, \dots, m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \leq \varepsilon_{\text{доп}}\}. \quad (4.10)$$

Величина  $\varepsilon_i = e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$  для всех  $i \in I_1$  характеризует наибольшие возможные потери в сравнении со значением  $e_{i_0 j_0}$ , задаваемым ММ-критерием. С другой стороны, в результате такого снижения открываются и возможности для увеличения выигрыша по сравнению с тем, который обеспечивается ММ-критерием. Поэтому мы рассматриваем также (опять-таки как подмножество множества  $\{1, \dots, m\}$ ) некоторое выигрышное множество

$$I_2 = \{i | i \in \{1, \dots, m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \geq e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i\}. \quad (4.11)$$

Тогда в множество-пересечение  $I_1 \cap I_2$  мы соберем только такие варианты решений, для которых, с одной стороны, в определенных состояниях могут иметь место потери по сравнению с состоянием, задаваемым ММ-критерием, но зато в других состояниях имеется по меньшей мере такой же прирост выигрыша. Теперь оптимальными в смысле BL(ММ)-критерия будут решения из множества

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j\}. \quad (4.12)$$

Правило выбора для этого критерия формулируется следующим образом.

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется еще тремя столбцами. В первом из них записываются математические ожидания каждой из строк, во втором — разности между опорным значением  $e_{i_0 j_0} = Z_{\text{ММ}}$  и наименьшим значением  $\min_j e_{ij}$  соответствующей строки. В третьем столбце помещаются разности между наибольшим значением  $\max_j e_{ij}$  каждой строки и

наибольшим значением  $\max_i e_{i_0j}$  той строки, в которой находится значение  $e_{i_0j_0}$ . Выбираются те варианты  $E_{i_0}$ , строки которых (при соблюдении приводимых ниже соотношений между элементами второго и третьего столбцов) дают наибольшее математическое ожидание. А именно, соответствующее значение  $e_{i_0j_0} = \min_j e_{ij}$  из второго столбца должно быть меньше или равно некоторому заранее заданному уровню риска  $\epsilon_{\text{доп}}$ . Значение же из третьего столбца должно быть больше значения из второго столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими признаками ситуации, в которой принимается решение:

— вероятности появления состояний  $F_j$  неизвестны, однако имеется некоторая априорная информация в пользу какого-либо определенного распределения;

— необходимо считаться с появлениями различных состояний как по отдельности, так и в комплексе;

— допускается ограниченный риск;

— принятое решение реализуется один раз или многократно.

Таким образом, спектр применимости нашей теории распространяется далеко за пределы предыдущих критериев. Особо следует подчеркнуть, что действие новых критериев остается вполне обозримым, хотя функция распределения может играть лишь подчиненную роль.

BL(MM)-критерий хорошо приспособлен для построения практических решений прежде всего в области техники и может считаться достаточно надежным. Однако задание границы риска  $\epsilon_{\text{доп}}$  и, соответственно, оценок риска  $\epsilon_i$  не учитывает ни число применений решения, ни иную подобную информацию. Влияние субъективного фактора хотя и ослаблено, но не исключено полностью.

Условие  $\max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0j} \geq \epsilon_i$  существенно в тех случаях, когда решение реализуется только один или малое число раз. В этих случаях недостаточно ориентироваться на риск, связанный лишь с невыгодными внешними состояниями и средними значениями. Из-за этого, правда, можно понести некоторые потери в удачных внешних состояниях. При большом числе реализаций это условие перестает быть таким уж важным. Оно даже допускает разумные альтернативы. В вышеизложенном не видно, однако, четких количественных указаний, в каких случаях это условие следовало бы опустить.

В заключение, не вдаваясь в детали, опишем некоторую комбинацию критерия Байеса — Лапласа с критерием Сэвиджа, называемую нами по аналогии с изложенным BL(S)-критерием;

для этого сравним соотношения (3.4), (3.5) и (3.6) с (3.7) — (3.10). За опорную величину примем

$$Z_s = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

где  $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ . Через  $\epsilon_{\text{доп}} > 0$  вновь определим допустимую границу риска. При этом уравнения (4.10) и (4.11) приобретают вид

$$I_1 = \{i | i \in \{1, \dots, m\} \wedge \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \leq \epsilon_{\text{доп}}\},$$

$$I_2 = \{i | i \in \{1, \dots, m\} \wedge \min_j a_{ij} \geq a_{i_0 j_0} - \max_j a_{ij} = \epsilon_i\},$$

где  $\epsilon_{\text{доп}} > 0$  — допустимая граница риска. Для  $E_0$  имеем:

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \min_{i \in I_1 \cup I_2} \sum a_{ij} q_j\}.$$

#### 4.5. Критерий произведений

Критерий произведений (P) до сего времени в теории принятия решений не применялся. В теории нечетких множеств [18] эта П-операция служит для фильтрации информации. С самого начала этот критерий ориентирован на величины выигрышей, т. е. на положительные значения  $e_{ij}$ .

Определим оценочную функцию:

$$Z_P = \max_i e_{ir}, \quad (4.13)$$

$$e_{ir} = \prod_j e_{ij}. \quad (4.14)$$

Тогда

$$E_0 = \{E_{i_0} | E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0\}. \quad (4.15)$$

Правило выбора в этом случае формулируется так.

Матрица решений  $\|e_{ij}\|$  дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты  $E_{i_0}$ , в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами:

- вероятности появления состояний  $F_j$  неизвестны;
- с появлением каждого из состояний  $F_j$  по отдельности необходимо считаться;

— критерий применим и при малом числе реализаций решения;

— некоторый риск допускается.

Как уже упоминалось, Р-критерий приспособлен в первую очередь для случаев, когда все  $e_{ij}$  положительны. Если указанное условие нарушается, а Р-критерий приходится применять и в этом случае, то следует выполнить некоторый сдвиг  $e_{ij} + a$  с некоторой константой  $a > |\min_{i,j} e_{ij}|$ . Разумеется, результат применения критерия существенно зависит от этого значения  $a$ . На практике в качестве значения  $a$  охотно используют величину  $|\min_{i,j} e_{ij}| + 1$ . Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то к таким проблемам Р-критерий не применим.

Выбор оптимального решения согласно Р-критерию оказывается значительно менее пессимистическим, чем, например, выбор в соответствии с ММ-критерием. Его тесная связь с нейтральным критерием (2.5) усматривается, например, из следующего рассуждения. Из строгой монотонности логарифмической функции следует, что значение  $e_{ir} = \prod_{j=1}^n e_{ij}$ , рассматриваемое в зависимости от  $i$ , максимально в точности тогда, когда максимален  $\ln e_{ir}$ , причем мы предполагаем здесь, что  $e_{ij} > 0$  для всех  $i$  и  $j$ .

Теперь имеем  $\ln e_{ir} = \sum_{j=1}^n \ln e_{ij}$ , и эта величина, очевидно, достигает максимума одновременно с  $\frac{1}{n} \ln e_{ir} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln e_{ij}$ . Последнее же выражение в точности соответствует нейтральному ВЛ-критерию (2.5)\*, если только величины  $e_{ij}$  в нем заменить на логарифмы  $\ln e_{ij}$ .

Таким образом, в результате применения Р-критерия происходит некоторое выравнивание между большими и малыми значениями  $e_{ij}$ , и, устанавливая оптимальный вариант решения с помощью Р-критерия, мы можем при фиксированных состояниях  $F_j$  получить большую выгоду, чем при использовании ММ-критерия, но при этом должна учитываться возможность появления и худших результатов. Следует отметить, что при использовании этого критерия ни число реализаций, ни информация о распределении вероятностей не принимаются во внимание.

---

\* Совмещение двух названий не должно смущать читателя: «нейтральный» критерий (2.5) совпадает с ВЛ-критерием (3.4), (3.5) в случае равномерного распределения на множестве состояний:  $q_j = 1/n$ . — Прим. перев.

Если оптимальный результат, полученный согласно Р-критерию, определяется преимущественно малыми значениями результатов, это указывает на довольно-таки пессимистический подход, аналогичный ММ-критерию. При возрастании полезного эффекта пессимистический акцент снижается и по существу происходит все большее сближение данного критерия с нейтральным. Тем самым достигается, правда, определенное выравнивание между пессимистической и нейтральной точками зрения, однако это выравнивание не есть результат какой-либо определенной характеристики ситуации, в которой принимаются решения, а скорее объясняется более или менее случайным набором возможных результатов.

#### 4.6. Принятие решений согласно производным критериям

Для построения оптимальных вариантов решения согласно производным критериям вновь рассмотрим матрицу решений о проведении проверок из разд. 3.5, табл. 3.2. Табл. 4.2 показывает применение НВ-критерия (3.5) при  $c=0,5$ .

Таблица 4.2. Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по НВ-критерию при  $c=0,5$  (данные в  $10^3$ )

$\ e_{ij}\ $			$c \min_j e_{ij}$	$(1-c) \max_j e_{ij}$	$e_{ir}$	$\max_i e_{ir}$
—20,0	—22,0	—25,0	—12,5	—10,0	—22,5	
—14,0	—23,0	—31,0	—15,5	—7,0	—22,5	
0	—24,0	—40,0	—20,0	0	—20,0	—20,0

В рассматриваемом примере у решения имеется поворотная точка относительно весового множителя  $c$ . Вплоть до  $c=0,57$  в качестве оптимального выбирается вариант  $E_3$ , а при больших значениях —  $E_1$ .

Для применения НЛ-критерия (4.6) сначала из разд. 3.5, табл. 3.2, переносятся построенные там столбцы  $\sum_{j=1}^n e_{ij}q_j$  и  $\min_j e_{ij}$ . Табл. 4.3 содержит результаты расчетов для  $v=1/2$  и  $q_1=q_2=q_3=1/3$ .

В этом случае НЛ-критерий рекомендует вариант  $E_1$  (полную проверку) — так же как и ММ-критерий. Смена рекомендуемого варианта происходит только при  $v=0,94$ . Поэтому равно-

Таблица 4.3. Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по HL-критерию при  $q_j=0,33$  и  $v=0,5$  (данные в  $10^3$ )

$\sum_j e_{ij} q_j$	$\min_j e_{ij}$	$v \sum_j e_{ij} q_j$	$(1-v) \min_j e_{ij}$	$e_{ir}$	$\max_i e_{ir}$
-22,33	-25,0	-11,17	-12,5	-23,67	-23,67
-22,67	-31,0	-11,34	-15,5	-26,84	
-21,33	-40,0	-10,67	-20,0	-30,76	

Таблица 4.4. Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по G-критерию при  $q_j=0,33$  (данные в  $10^3$ )

$\ e_{ij}\ $	$\ e_{ij} q_j\ $	$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j$	$\max_i e_{ir}$
-20,0 -22,0 -25,0	-6,67 -7,33 -8,33	-8,33	-8,33
-14,0 -23,0 -31,0	4,67 -7,67 -10,33	-10,33	
0 -24,0 -40,0	0 -8,0 -13,33	-13,33	

Таблица 4.5. Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по BL(MM)-критерию при  $q_j=0,33$  (данные в  $10^3$ )

$\ e_{ij}\ $	$\sum_j e_{ij} q_j$	$e_{i0} - \min_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij}$	$\max_j e_{ij} - \max_j e_{i0}$
-20,0 -22,0 -25,0	-22,33	0	-20,0	0
-14,0 -23,0 -31,0	-22,67	+6,0	-14,0	+6,0
0 -24,0 -40,0	-21,33	+15,0	0	+20,0

Таблица 4.6. Построение оптимального решения для матрицы решений о проверках по P-критерию при  $a=41 \cdot 10^3$  и  $a=200 \cdot 10^3$  (данные в  $10^3$ )

	$\ e_{ij} + a\ $	$e_{ir} = \min_j e_{ij}$	$\max_i e_{ir}$
$a=41$	+21	+16	6384
	+27	+18	4860
	+41	+17	697
$a=200$	+180	+175	5607
	+186	+177	5563
	+200	+176	5632

мерное распределение состояний рассматриваемой машины должно распознаваться с довольно высокой вероятностью, чтобы его можно было выбрать по большему математическому ожиданию. При этом число реализаций решения всегда остается произвольным.

Табл. 4.4 иллюстрирует выбор оптимального варианта согласно G-критерию (4.9) при  $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ .

В качестве оптимального выбирается вариант  $E_1$ . Сравнение вариантов с помощью величин  $e_{ir}$  показывает, что способ действия G-критерия является даже более гибким, чем у MM-критерия.

Таблица 4.7. Оптимальные варианты для задачи о проверках, полученные с помощью различных критериев и разных значений характеристических параметров

	MM-критерий	BL-критерий	S-критерий	NW-критерий	NL-критерий	G-критерий	BL(MM)-критерий	P-критерий
$E_1$	+		+	$c \geq 0,57$	$v \leq 0,94$	$q_1 = 0,33$	$\epsilon_{\text{доп}} < 15 \cdot 10^3$	$a = 41 \cdot 10^3$
$E_2$								
$E_3$		$q_1 = 0,33$		$c < 0,57$	$v > 0,94$		$\epsilon_{\text{доп}} \geq 15 \cdot 10^3$	$a = 200 \cdot 10^3$

Табл. 4.5 иллюстрирует выбор решения в соответствии с BL(MM)-критерием (4.12) при  $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$ . Вариант  $E_3$  (отказ от проверки) принимается этим критерием только тогда, когда риск приближается к  $\epsilon_{\text{возм}} = 15 \cdot 10^3$ . В противном случае оптимальным оказывается  $E_1$ . Во многих технических или хозяйственных задачах допустимый риск бывает намного ниже, составляя обычно лишь незначительный процент от общих затрат. В подобных случаях бывает особенно ценно, если неточное знание распределения вероятностей сказывается не очень сильно. Если при этом оказывается невозможным установить допустимый риск  $\epsilon_{\text{доп}}$  заранее, независимо от принимаемого решения, то помочь может вычисление ожидаемого риска  $\epsilon_{\text{возм}}$ . Тогда становится возможным подумать, оправдан ли подобный риск. Такое исследование обычно дается легче.

Выбор решения согласно P-критерию (4.13) иллюстрирует табл. 4.6. Условие  $e_{ij} > 0$  для данной матрицы не выполнено. Поэтому к элементам матрицы добавляется (по внешнему произволу) сначала  $a = 41 \cdot 10^3$ , а затем  $a = 200 \cdot 10^3$ . Дальнейшее показано в табл. 4.6. Для  $a = 41 \cdot 10^3$  оптимальным оказывается вариант  $E_1$ , а для  $200 \cdot 10^3$  — вариант  $E_3$ , так что здесь снова видна зависимость оптимального варианта от значения  $a$ .



В табл. 4.7 сведены воедино рекомендации всех критериев. Видно, что применение производных критериев повышает надежность решения. Вариант  $E_2$  оказывается невыгодным с различных точек зрения. Критерии G и BL(MM) выделяют вариант  $E_1$ . Критерий BL(MM) устанавливает уровень риска, который следует превысить, чтобы выбрать  $E_3$ . Если число реализаций нашего решения не слишком велико, то следует предпочесть вариант  $E_1$ , хотя классические критерии не высказываются единогласно в пользу какого-либо из вариантов.

---

## СВЯЗИ МЕЖДУ КРИТЕРИЯМИ

---

Уже при введении и обсуждении критериев выбора решений в гл. 3 и 4 стали заметны определенные сходства и различия между ними, которые теперь следует обсудить более подробно. При этом мы хотим прояснить способ действия различных критериев как путем их взаимного сравнения, так и, насколько это возможно, с помощью соответствующих графических представлений.

При этом (в особенности с точки зрения последующих более общих построений) целесообразно сначала ввести в рассмотрение функцию  $e(y, x)$  вместо конечного числа значений  $e_{ij}$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ . Здесь  $x$  представляет собой переменную для возможных состояний, а  $y$  — переменную для решений (мы используем при этом то положение, что в зависимости от заданного состояния  $x$  требуется выбрать подходящее значение переменной решения  $y$ ), которые принадлежат бесконечным, вообще говоря, областям  $F$  (для возможных состояний) и  $E$  (для переменных решения):

$$e(y, x), \quad y \in E, \quad x \in F.$$

Случай конечных множеств вариантов решений и состояний, только и рассматривавшийся ранее, получается в этой постановке для конечных множеств  $E$  и  $F$ . Имея в виду наглядность графической интерпретации, ограничимся в дальнейшем двумя состояниями  $F_1$  и  $F_2$ , тогда как переменной решения  $y$  мы позволим принадлежать бесконечной, вообще говоря, области  $E$ . При этом для состояний  $F_1$  и, соответственно,  $F_2$  в зависимости от решения  $y \in E$  получаются результаты  $u=e(y, F_1)$  и, соответственно,  $v=e(y, F_2)$ , откладываемые по осям прямоугольной системы координат  $(u, v)$ , см. рис. 5.1. Точка  $(u, v)$  на  $(u, v)$ -плоскости представляет тем самым результаты варианта решения  $y$ , соответствующие обоим состояниям  $F_1$  и  $F_2$ .

В случае конкретного критерия, оценочная функция которого  $e_{ir}$  при наличии двух состояний  $F_1$  и  $F_2$  есть функция величин  $e_{i1}$  и  $e_{i2}$ , т. е.  $e_{ir}=f(e_{i1}, e_{i2})$ , после подстановки  $u=e(y, F_1)$  вместо  $e_{i1}$  и  $v=e(y, F_2)$  вместо  $e_{i2}$  с помощью равенства

$$f(u, v) = k \tag{5.1}$$

задается семейство линий уровня. Функцию  $f$  мы называем функцией предпочтения (соответствующей данному критерию). Для большинства критериев задача состоит в максимизации результата. Если в какой-либо конкретной ситуации с конечным числом вариантов решения  $y_i \in E$ ,  $i=1, \dots, m$ , имеется  $m$  точек  $(u_i, v_i)$ ,  $u_i = e(y_i, F_1)$ ,  $v_i = e(y_i, F_2)$ ,  $i=1, \dots, m$ , в области полезности, то точка  $(u_{i_0}, v_{i_0})$ , отвечающая наивысшему уровню  $k$ , определяет оптимальный вариант решения  $y_{i_0} \in E$ .

Часто бывает так, что семейство линий уровня получается параллельными переносами некоторой линии вдоль какой-либо

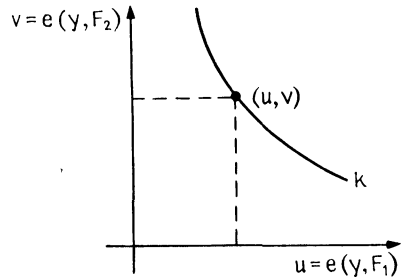


Рис. 5.1. Функция предпочтения.

прямой на плоскости  $(u, v)$ ; назовем эту прямую *направляющей*  $LG$ . Можно представить себе при этом, например, семейство конусов предпочтения для ММ-критерия, вершины которых лежат на направляющей  $y=x$ . В этом случае оптимальный вариант решения (для рассматриваемых здесь критериев) получается просто за счет того, что линия уровня сдвигается до тех пор, пока она в последний раз задевает область полезности — именно, в точке наивысшего уровня.

## 5.1. Критерии с прямоугольными конусами предпочтения

### 5.1.1. ММ-критерий

Действуя в соответствии с изложенным в гл. 5 для минимаксного критерия, задаваемого согласно (2.6) равенством

$$\max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij},$$

получаем в двумерном случае ( $m=2$ ,  $e_{i1}=u$ ,  $e_{i2}=v$ ) в качестве линий уровня семейство кривых

$$\min(u, v) = k,$$

зависящее от параметра  $k$ . Это означает, что на линии уровня,

соответствующей параметру  $k$ , лежат в точности те точки плоскости  $(u, v)$ , для которых значение меньшей из координат  $u$  и  $v$  равно  $k$ , т. е. для которых расстояние до ближайшей координатной оси равно  $k$  (рис. 5.2). Чтобы найти теперь оптимальный вариант решения, выбираем на биссектрисе  $u=v$  первого квадранта произвольную, однако достаточно близкую к началу координат  $(0, 0)$  точку, чертим, исходя из нее, конус предпочтения, задаваемый как раз соответствующими линиями уровня,

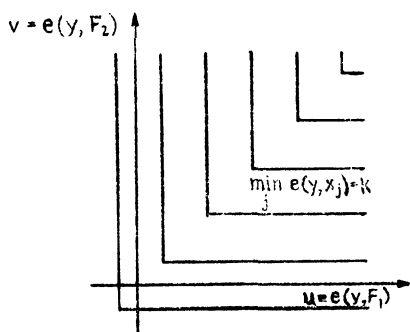


Рис. 5.2. Функции предпочтения ММ-критерия.

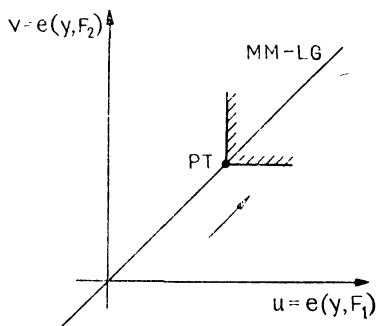


Рис. 5.3. Графический выбор решения в соответствии с ММ-критерием.

после чего всю систему, состоящую из указанных точки и конуса, переносим по биссектрисе до тех пор, когда нам в последний раз встречается одна из точек  $(e_{i1}, e_{i2})$ ,  $i=1, \dots, m$  (рис. 5.3). Каждой такой точке соответствует максимально достижимый уровень и тем самым оптимальный вариант решения.

### 5.1.2. G-критерий

В разд. 4.3 впервые зашла речь о родстве между ММ-критерием и критерием Гермейера. В рассмотренной там форме этот критерий ограничивался исключительно случаем отрицательных значений  $e_{ij}$ . Обобщим его сначала на случай, когда все значения  $e_{ij}$  положительны:

$$Z_G = \begin{cases} \max_i \min_j e_{ij} q_j, & e_{ij} < 0 \\ & \text{для } i=1, \dots, m \\ & j=1, \dots, n \\ \max_i \min_j e_{ij} \frac{1}{q_j}, & e_{ij} > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

причем величины  $q_j$  являются вероятностями:

$$q_j > 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

Поскольку  $u = e(y, F_1)$ ,  $v = e(y, F_2)$ , линии уровня G-критерия приводятся к виду

$$\min(uq_1, vq_2) = k_1 \quad \text{для } e(y, x) < 0, \quad (5.3)$$

т. е. для сплошь отрицательных возможных результатов, и

$$\min\left(u \frac{1}{q_1}, v \frac{1}{q_2}\right) = k_2 \quad \text{для } e(y, x) > 0, \quad (5.4)$$

т. е. для сплошь положительных возможных результатов.

Эти линии уровня (или функции предпочтения) в прямоугольной системе координат задают опять-таки прямоугольные конуса. Вершины этих конусов лежат на так называемых опорных прямых

$$v = (q_1/q_2)u \quad \text{для } e(y, x) < 0 \quad (5.5)$$

и

$$v = (q_2/q_1)u \quad \text{для } e(y, x) > 0. \quad (5.6)$$

Рис. 5.4 иллюстрирует эти соотношения для  $q_1 = 1/3$  и  $q_2 = 2/3$ . В то же время он демонстрирует как аналогии, так и различия между этим критерием и ММ-критерием (рис. 5.1), получаю-

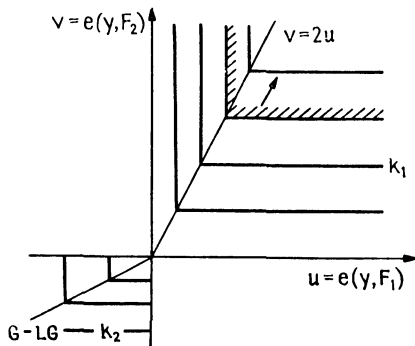


Рис. 5.4. Функции предпочтения G-критерия при  $q_1 = 1/3$ ,  $q_2 = 2/3$ .

щимся в виде частного случая при  $q_1 = q_2 = 1/2$ . Изменяющиеся значения  $q_1$  и  $q_2$  приводят к различным углам наклона опорной прямой.

Линии уровня из третьего квадранта, т. е. для случая отрицательных возможных результатов, не продолжают во второй и четвертый квадранты. Оптимальное решение определяется

здесь опять-таки перемещением конуса предпочтения вдоль опорной прямой до достижения последней точки в области полезности.

### 5.1.3. S-критерий

Пользуясь введенными в 5.1 величинами  $u = e(y, F_1)$  и  $v = e(y, F_2)$ , обозначим теперь через  $\hat{u} = \min_y e(y, F_1)$  и  $\hat{v} = \min_y e(y, F_2)$  координаты антиутопической точки АУТ  $(\hat{u}, \hat{v})$ , а через  $\bar{u} = \max_y e(y, F_1)$  и  $\bar{v} = \max_y e(y, F_2)$  — координаты утопической точки УТ  $(\bar{u}, \bar{v})$ , с помощью которых полностью определяется поле полезности (рис. 5.4).

Линии уровня, согласно (3.8), приводятся к виду

$$\max\{\max_y e(y, F_1) - e(y, F_1), \max_y e(y, F_2) - e(y, F_2)\} = k,$$

т. е.  $\max\{\hat{u} - u, \hat{v} - v\} = k.$  (5.7)

Как видно на рис. 5.5, линии уровня вновь оказываются конусами предпочтения, вершины которых лежат на направляющей

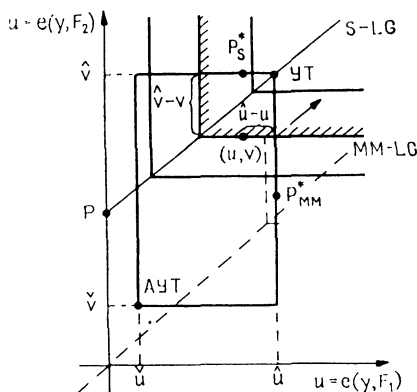


Рис. 5.5. Функции предпочтения S-критерия.

$S - LG$ , проходящей через точку УТ и параллельной биссектрисе  $u = v$ . Конусы предпочтения, вершины которых лежат внутри (соответственно, вне) поля полезности, отвечают положительным (соответственно, отрицательным) значениям уровня  $k$ , тогда как конусу, вершиной которого служит сама точка УТ, отвечает значение  $k = 0$ .

Чтобы показать, как S-критерий сводится к ММ-критерию, будем исходить из следующих равенств:

$$u + (\hat{u} - u) = \hat{u}, \quad v - (\hat{v} - \hat{u}) + (\hat{v} - v) = \hat{u}. \quad (5.8)$$

Отсюда ясно, что минимизация согласно S-критерию величины

$$\max[\hat{u} - u, \hat{v} - v]$$

соответствует максимизации согласно ММ-критерию величины  $\min[u, v - (\hat{v} - \hat{u})]$ , т. е. оптимизация в соответствии с S-критерием эквивалентна оптимизации в соответствии с ММ-критерием, если только начало координат системы перенести в точку  $P_0(0, \hat{v} - \hat{u})$ .

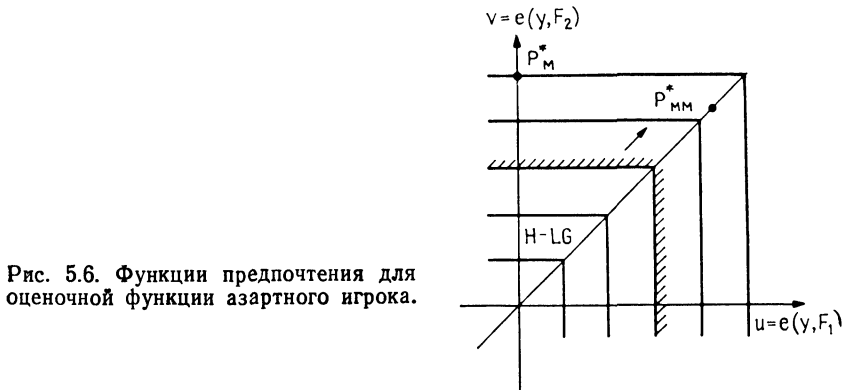


Рис. 5.6. Функции предпочтения для оценочной функции азартного игрока.

По сравнению с ММ-критерием специфика S-критерия состоит в том, что он более приспособлен к полю полезности, а соответствующая ему оптимизация соотносится с утопической точкой УТ, и притом в смысле аппроксимации, равномерной относительно всех возможных состояний. На рис. 5.5, согласно сказанному, точка  $P_{MM}^*$  оптимальна в соответствии с ММ-критерием, а точка  $P_S^*$  оптимальна в соответствии с S-критерием.

#### 5.1.4. Функции предпочтения азартного игрока

Рассмотрим теперь критерий Н, определяемый соотношением (2.4), в соответствии с которым максимизируется по  $i$  оценочная функция  $\max_i e_{ij} = e_{ir}$ . Если воспользоваться введенными выше обозначениями  $u = e(y, F_1)$  и  $v = e(y, F_2)$ , то линии уровня (в случае двух состояний) приводятся к виду

$$\max(u, v) = k.$$

Они представляют собой в этом случае семейство антиконусов, раскрывающихся вниз и налево, а их вершины располагаются на биссектрисе координатных углов, которая выступает в качестве направляющей прямой Н — LG. Чтобы найти решение,

оптимальное относительно этого критерия, нужно перемещать такой антиконус с вершиной на прямой  $H-LG$  направо — вверх до тех пор, пока одна его точка остается в поле полезности. Как показывает пример на рис. 5.6, сам по себе этот критерий не очень эффективен, поскольку он выделяет только доминируемые варианты решений, а также допускает другие, тоже очень невыгодные варианты.

## 5.2. Критерий с прямыми предпочтения

Согласно соотношению (3.6), для BL-критерия, оценочной функцией которого служит

$$e_{lr} = \sum_{j=1}^n e_{lj} q_j, \quad q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1, \quad (5.9)$$

в случае двух состояний  $F_1$  и  $F_2$  и при обозначениях  $u = e(y, F_1)$ ,  $v = e(y, F_2)$  в качестве семейства линий уровня получают прямые

$$uq_1 + vq_2 = k. \quad (5.10)$$

Таким образом, мы имеем здесь дело с семейством прямых, отсекающих на осях отрезки  $k/q_1$  и  $k/q_2$ , причем предполагается, что  $q_1 > 0$  и  $q_2 > 0$  (рис. 5.7). (Случай  $q_1 = 0$  (соответственно,

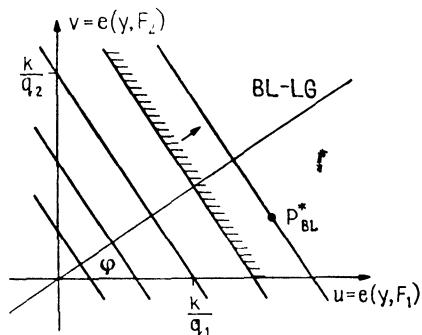


Рис. 5.7. Функции предпочтения BL-критерия.

$q_2 = 0$ ) приводит к прямым, параллельным  $u$ -оси (соответственно,  $v$ -оси), и означает, что рассматривается лишь единственное состояние.) Направляющая прямая — мы можем провести ее так, чтобы она проходила через начало координат, — располагается перпендикулярно семейству линий уровня и потому задается уравнением  $v = (q_2/q_1)u$  с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \varphi = q_2/q_1$ .



Под именем BL-критерия в действительности скрывается целое семейство критериев, в качестве определяющего параметра для которых можно выбрать угол  $\varphi$  или  $\operatorname{tg} \varphi = q_2/q_1$ , т. е. отношение соответствующих вероятностей. В зависимости от  $\varphi$  меняется соответственно наклон линий уровня и направляющих прямых.

В частном случае равных вероятностей  $q_1 = q_2$  получается критерий Бернулли с  $\varphi = \pi/4$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ , направляющей прямой  $u = v$  и семейством линий уровня  $u + v = k$ .

Оптимальное решение и в случае BL-критерия находится путем перемещения линий уровня до момента, когда достигается последняя точка в поле полезности.

### 5.3. Производные критерии

#### 5.3.1. HL-критерий

Для HL-критерия с его задаваемой соотношением (4.6) оценочной функцией

$$e_{it} = v \sum_{j=1}^n q_j e_{ij} + (1 - v) \min_j e_{ij}$$

в случае двух состояний  $F_1$  и  $F_2$  и при обозначениях  $u = e(y, F_1)$ ,  $v = e(y, F_2)$  получаем в качестве семейства линий уровня

$$v(q_1 u + q_2 v) + (1 - v) \min\{u, v\} = k. \quad (5.11)$$

Оно представляет собой двояко бесконечное семейство кривых, и это означает, что здесь могут меняться весовой множитель  $v$  ( $0 \leq v \leq 1$ ) и отношение вероятностей  $q_1/q_2$ , где наряду с условием  $q_1 + q_2 = 1$  вновь предполагается, что  $q_1 > 0$  и  $q_2 > 0$ .

Линии уровня представляют собой конусы с углами раствора от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ , причем вершины конусов лежат на направляющей  $v = u$ . Отрезки  $a$  и  $b$ , образующиеся при пересечении лучей конуса с осями  $u$  и  $v$ , находятся в отношении  $a : b = q_2 : q_1$ . На рис. 5.8 показано, как обстоит дело в частном случае  $v = 1/4$ ,  $q_1 = 1/3$ ,  $q_2 = 2/3$ , т. е. когда ММ-критерий играет по отношению к BL-критерию доминирующую роль, а состояние  $F_2$  встречается с большей вероятностью, чем  $F_1$ .

Чтобы разобраться в построении линий уровня, целесообразно рассмотреть уровень  $k = 1$ . В этом случае вершиной конуса предпочтения служит точка  $(1, 1)$ , а отрезки, отсекаемые на осях, суть  $a = 1/vq_1$  для оси  $u$  и  $b = 1/vq_2$  для оси  $v$ . Все се-

мейство линий уровня получается путем параллельных переносов этого специального конуса по биссектрисе первого квадранта в качестве направляющей. Понятно, что при возрастании  $v$  лучи этого конуса предпочтения теснее прилегают к ортогональным лучам конуса предпочтения, соответствующего ММ-критерию, а при уменьшении  $v$  — к прямым предпочтения  $u + v = k$ , соответствующим ВЛ-критерию. Оптимальное решение, отвечающее НЛ-критерию, вновь получается в результате пере-

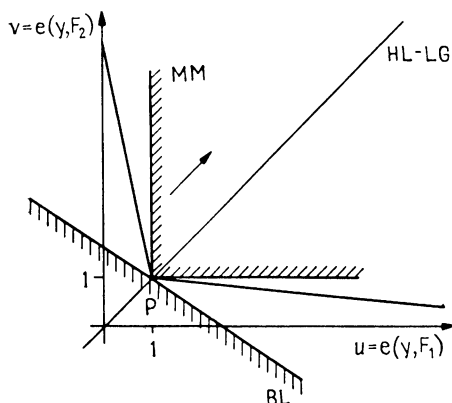


Рис. 5.8. Функции предпочтения НЛ-критерия.

мещения конуса предпочтения вправо — вверх по направляющей  $v = u$  до тех пор, пока он в последний раз не заденет поле полезности.

### 5.3.2. Р-критерий

Строго говоря, Р-критерий не принадлежит к числу производных критериев. Если, однако, рассматривать логарифмы результатов решения, то он переходит в ВЛ-критерий и потому может рассматриваться как производный от последнего.

Оценочной функцией на сей раз служит величина

$$e_{ir} = \prod_i e_{ij}.$$

В случае двух состояний  $F_1$  и  $F_2$  и при обозначениях  $u = e(y, F_1)$ ,  $v = e(y, F_2)$  получаем для линий уровня

$$uv = k. \quad (5.12)$$

Они представляют собой, таким образом, семейство гипербол (рис. 5.9), прилегающих к лучам конуса предпочтения ММ-критерия. При возрастании значения  $k$  эти гиперболы переходят в

прямую предпочтения BL-критерия  $u+v=k^*$ ). Оптимальное решение и для Р-критерия получается в результате перемещения конуса предпочтения вправо — вверх вдоль направляющей  $v=u$  до тех пор, пока он в последний раз не заденет поле полезности.

### 5.3.3. HW-критерий

В случае HW-критерия, максимизирующего, согласно (4.3), оценочную функцию

$$e_{ir} = c \min_i e_{ij} + (1 - c) \max_i e_{ij}, \quad 0 \leq c \leq 1,$$

в случае двух состояний  $F_1$  и  $F_2$  и при обозначениях  $u = e(y, F_1)$ ,  $v = e(y, F_2)$  получаем для семейства линий уровня

$$c \min(u, v) + (1 - c) \max(u, v) = k, \quad 0 \leq c \leq 1. \quad (5.13)$$

На рис. 5.10 показаны эти линии уровня для трех значений  $c = 1/4$ ,  $c = 1/2$  и  $c = 3/4$ .

HW-критерий представляет собой комбинацию ММ-критерия и критерия азартного игрока Н. Здесь  $c$  является весовым

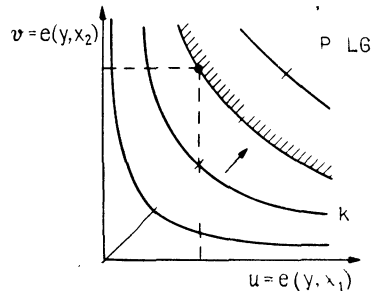


Рис. 5.9. Функции предпочтения Р-критерия.

множителем: чем ближе  $c$  к 1 (соответственно, к 0), тем больше влияние ММ-критерия (соответственно, Н-критерия). При  $c = 1/2$  оба критерия равноценны, и в качестве конусов предпочтения получаются обыкновенные прямые, как в случае нейтрального BL-критерия. Оптимальное согласно HW-критерию решение вновь получается в результате перемещения конуса

\* Это утверждение авторов нуждается в корректировке. Действительно, при возрастании  $k$  гипербола  $uv=k$  удаляется от начала координат и становится в окрестности точки пересечения с биссектрисой  $v=u$  более близкими к прямой (строго говоря, уменьшается их максимальная кривизна). Но, во-первых, «приближение к прямой» носит лишь локальный характер (хвосты гиперболы уходят от любой прямой  $u+v=C$  сколь угодно далеко). Во-вторых, и локально хорошее приближение для гиперболы  $uv=k$  дает не прямая  $u+v=k$ , а касательная  $u+v=2\sqrt{k}$  или секущая  $u+v=C$ , где  $C$  немного больше, чем  $2\sqrt{k}$ . — Прим. перев.

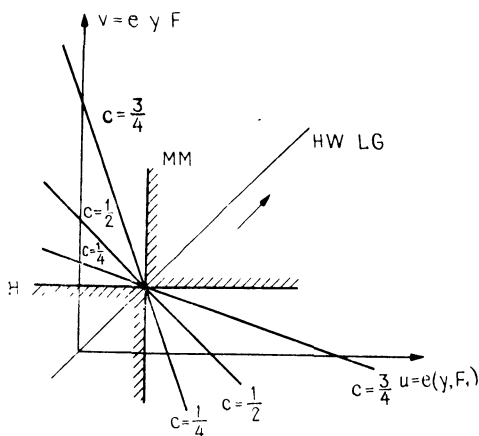


Рис. 5.10. Функции предпочтения HW-критерия.

(для  $c > 1/2$ ) или, соответственно, антиконуса (для  $c < 1/2$ ) предпочтения вправо — вверх до тех пор, пока он в последний раз не коснется поля полезности.

#### 5.3.4. BL(MM)-критерий

Графическая интерпретация BL(MM)-критерия [см. соотношение (4.12)] не так проста, как в ранее рассмотренных случаях. Это связано в первую очередь с наличием множеств  $I_1$  и  $I_2$  [см. соотношения (4.10) и (4.11)], ограничивающих выбор

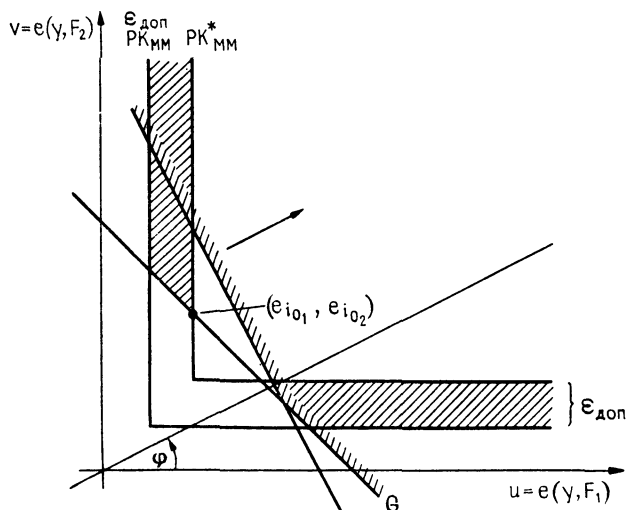


Рис. 5.11. Графический выбор в соответствии с BL(MM)-критерием

вариантов решений. Рис. 5.11 опять-таки для случая двух состояний проясняет существо дела для значений допустимого риска  $\varepsilon_{\text{доп}} = \varepsilon_{i_0 j_0} / 2$  и  $q_1 = 2/3$ ,  $q_2 = 1/3$ . Выделим сначала в поле полезности точку  $(e_{i_{01}}, e_{i_{02}})$  и соответствующий конус предпочтения  $\text{РК}^*_{\text{мм}}$ , определяемый ММ-критерием. Нарисуем затем конус предпочтения  $\text{РК}^{\text{доп}}_{\text{мм}}$  с образующими, параллельными образующим первого конуса, и уровнем, пониженным на величину допустимого риска  $\varepsilon_{\text{доп}} = \varepsilon_{i_0 j_0} / 2$ . Угловая область, находящаяся между этими двумя конусами, содержит — включая границу — величины полезности из множества согласия  $I_1$ . С другой стороны, справа и выше прямой  $G$ , проходящей через точку  $(e_{i_{01}}, e_{i_{02}})$  и параллельной биссектрисе второго и четвертого координатных углов, расположены все точки поля полезности, для которых соответствующие варианты решений принадлежат выигрышному множеству  $I_2$ . Допустимая область  $I_1 \cap I_2$  состоит тогда из обеих заштрихованных подобластей. Семейство линий уровня будет то же, что и для ВЛ-критерия (см. разд. 5.2). Направляющая прямая исходит из начала координат и имеет угловой коэффициент  $\text{tg } \varphi = q_2 / q_1$ . Семейство перпендикулярных ей линий уровня и некоторая точка из заштрихованной области, обладающая наивысшим согласно ВЛ-критерию уровнем, определяют оптимальное решение.

### 5.3.5. Обобщения

По аналогии с ВЛ (ММ)-критерием (4.12) существуют различные формы, поглощающие описанные в гл. 4 и 5 «классические» критерии выбора решений с их ограниченными областями применения и содержащие в себе эти классические критерии в качестве частных случаев.

Так, например, можно обобщить критерий Гурвица (4.3), чтобы из него путем подходящей специализации получать Н-критерий азартного игрока (2.4), ММ-критерий (3.3), ВЛ-критерий (3.6), НЛ-критерий (4.6) и другие. Правда, такая гибридизация интересна лишь с теоретической точки зрения, оставляя для практика в качестве открытой проблему назначения свободного параметра.

Х. Шнеевайс [19] предлагает в качестве основополагающего критерия принцип Бернулли, характеризующийся средним ожидаемым результатом. При этом показано, что с помощью подходящих предположений о данных распределениях вероятностей, которые всегда считаются известными, достигается соглашение с классическими критериями.

Еще один способ обобщения содержится в гибком критерии (7.1).

## КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИТУАЦИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

### 6.1. Инфомация принимающего решения

Всякий процесс или система строятся в соответствии с определенными представлениями об их назначении. В какой мере эта цель может быть реализована, зависит от влияния величин, определяемых самой системой и ее окружением. Те из таких величин, которые от нас не зависят, примем за независимые переменные  $x_l$ , где  $l=1, \dots, L$ ; величины же, которые тем или иным образом выбираются, будем считать зависимыми переменными  $y_k$ , где  $k=1, \dots, K$ . Обозначим теперь через  $D_l^{(x)}$  и, соответственно,  $D_k^{(y)}$  рассматриваемые области значений переменных  $x_l$  и, соответственно,  $y_k$ :  $x_l \in D_l^{(x)}$ ,  $l=1, \dots, L$ ,  $y_k \in D_k^{(y)}$ ,  $k=1, \dots, K$ . Каждой реальной ситуации соответствует некоторая комбинация  $(x_1, \dots, x_L)$  возможных реализаций  $x_l \in D_l^{(x)}$  имеющихся  $L$  внешних факторов в качестве (векторного) состояния окружения наряду с соответствующей комбинацией  $(y_1, \dots, y_K)$   $K$  возможных управляемых параметров  $y_k \in D_k^{(y)}$  в качестве некоторого (векторного) варианта решения. При принятии технического решения управляемые параметры  $y_k$  должны быть определены так, чтобы система или процесс (см. рис. 6.1) возможно более близко подошли к поставленной цели, причем влияние независимых параметров также должно быть учтено. Независимые переменные предполагаются упорядоченными без ущерба для вычислений и произвольным по отношению к окружающему миру способом.

В зависимости от внешних влияний получается некоторая классификация соответствующих решений. В табл. 6.1 представлены различные виды параметров, расклассифицированные по типам их значений. Ниже описывается информация о влиянии внешних факторов, которой обладает принимающий решение. Она является достаточной, если это влияние описывается заданием детерминированных параметров. При недостаточной информации входные параметры могут быть, напротив, выражены недетерминированным способом. Таковы, например, способы задания параметра с помощью какого-то числа его дискретных значений или кусочно-постоянных величин.

Стохастические параметры (соответствующие математическому понятию случайной величины) суть величины, прини-

мающие значения в какой-либо определенной области согласно некоторому распределению вероятностей. Эти вероятностные распределения оцениваются посредством частот, измеряемых или наблюдаемых при проведении достаточно большого числа опытов с соблюдением одинаковых условий. Недостаток подобной информации состоит в том, что неизвестно, какое в точности значение примет в данной ситуации сам параметр при полностью известной функции его распределения.

Наконец, необходимы также гипотетические способы задания параметров, когда отсутствуют какие-либо измерения или

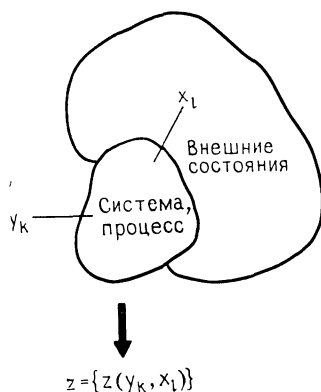

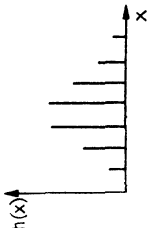

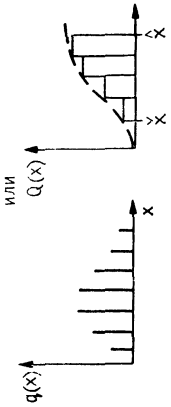

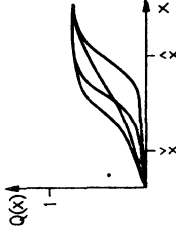

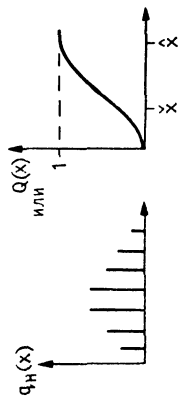




Рис. 6.1. Система и влияющие на нее факторы.

наблюдения частот. Эти способы могут состоять, например, в предположении (гипотезе или утверждении) об области изменения стохастических параметров или о соответствующем распределении вероятностей в этой области. Такие предположения проверяются с помощью теории статистических гипотез, посредством которой можно в зависимости от установленной вероятности ошибки выбрать то или иное предположение о параметре или типе его распределения вероятностей. Уровень информации следует считать тем более низким, чем большее число типов распределений приходится привлекать для сравнения. В предельном случае, когда на тип обсуждаемого распределения нет вообще никаких ограничений, остается лишь делать предположения о границах области изменения параметров. Этот случай соответствует самому низкому уровню информации. В действительности он, строго говоря, встречается так же редко, как и случай детерминированного задания параметров. Тем не менее, оба этих случая являются идеализациями большого практического значения. Проблемы принятия решений с недетерминированно заданными параметрами называют проблемами в условиях недостатка информации.

Таблица 6.1. Типы задания параметров в задачах организации производства

$Q(x)$  — распределение вероятностей параметра  $x$ ;  $q(x)$  — вероятность значения параметра  $x$ ;  $H$  — индекс гипотезы;  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}$  — нижний и верхний пределы значений параметра  $x$ ;  $*$  — индекс для дискретных значений

Виды параметров	Исходная ситуация	Представление
<div> Детерминированные (однозначные) </div> <div> с фиксированным распределением вероятностей </div>	<div>  </div> <div> <math>x_j = (x_j, h_j)</math> </div> <div>  </div>	<div> <math>x = x^*</math> </div> <div>  </div> <div> <math>x_j = (x_j, q_j)</math> или <math>x \in [\hat{x}, \hat{x}]</math> при <math>Q(x)</math> </div> <div>  </div>
<div> Без фиксированного распределения вероятностей </div> <div> гипотезы о не- известном рас- пределении ве- роятностей </div>	<div>  </div> <div> <math>x \in [\hat{x}, \hat{x}]</math> при <math>Q(x) \in \{Q_H(x)\}</math> </div> <div>  </div>	<div>  </div> <div> <math>x_j = (x_j, q_{Hj})</math> или <math>x \in [\hat{x}, \hat{x}]</math> при <math>Q_H(x)</math> </div> <div>  </div>
<div> Без фиксированного распределения вероятностей </div> <div> гипотез о неиз- вестном распре- делении веро- ятности нет </div>	<div>  </div> <div> <math>x \in [\hat{x}, \hat{x}]</math> </div>	<div>  </div> <div> <math>x_j = [\hat{x}, \hat{x}]</math> </div>

СТОХАСТИЧЕСКИЕ (МНОГОЗНАЧНЫЕ)



**Различие** между ожидаемым и действительным результатами принимаемых решений оказывается в целом тем меньшим, чем более мы информированы об имеющейся ситуации. Поэтому принимающий решение должен стремиться обосновать свое решение на максимально возможном уровне информации. Однако если он считает уровень информации более высоким, чем тот, что имеется на самом деле, то это приводит к ошибкам, которые при дальнейшей работе с решением едва ли уже могут быть сглажены.

В практических ситуациях всегда наблюдается значительное число параметров, более или менее неизвестных и требующих, строго говоря, статистического оценивания. Если имеется  $L$  неизвестных параметров с  $n_l$  возможными состояниями для  $l$ -го из них, то всего для окружения получается

$$N = \prod_{l=1}^L n_l \quad (6.1)$$

состояний. Поэтому было бы невообразимо сложно работать со всеми неизвестными параметрами технической проблемы как с величинами, имеющими много возможных значений. Влияние тех или иных параметров на результат решения может быть очень различным. Если оно достаточно мало, то неопределенность соответствующего параметра можно для простоты игнорировать и достичь тем самым более высокого уровня информации. Мера влияния параметров на результат решения формализуется в понятии *релевантности*. С его помощью различные параметры упорядочиваются по степени их влияния.

**Если некоторое решение реализуется многократно, то внешние условия** приходится рассматривать двумя различными способами. Если вначале происходит неизвестная реализация независимых параметров с равными возможными значениями для каждого, то мы имеем дело с детерминированным, хотя и неизвестным нам поведением окружения. Для системы или процесса важно выявление независимых влияний параметров окружения. Хотя в действительности значение каждого параметра определено однозначно, из-за возможной недостоверности его знания мы, принимая решение, должны считать его лишь принадлежащим интервалу  $[\tilde{x}, \hat{x}]$ . Неопределенность возможного значения этого параметра в интервале  $[\tilde{x}, \hat{x}]$  описывается с помощью некоторого (априорного) распределения. В случае полной неопределенности выбирают равномерное непрерывное распределение на  $[\tilde{x}, \hat{x}]$ . При этом границы интервала получаются на основе гипотез или оценок. Принятое таким же образом распределение позволяет оценить, где или с какой уверенностью принимающий решение должен ожидать то

или иное значение параметра. Если окружение характеризуется  $L$  независимыми параметрами  $x_l$ ,  $l=1, \dots, L$ , с  $n_l$  возможными значениями для параметра  $x_l$ ,  $x_{l j_l} \in D_l^{(x)}$ ,  $j_l=1, \dots, n_l$ , то полностью состояние окружения определяется вектором

$$\mathbf{x}_w = (x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{Lj_L}).$$

Всего имеется  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_L = N$  таких векторов. Аналогично, если принимающий решение задает значения  $K$  управляемых параметров  $y_k$ ,  $k=1, \dots, K$ , причем для  $y_k$  возможны  $m_k$  значений  $y_{k i_k} \in D_k^{(y)}$ ,  $i_k=1, \dots, m_k$ , то всякое конкретное решение также представляет собой вектор

$$\mathbf{y}_z = (y_{1i_1}, y_{2i_2}, \dots, y_{Ki_K}).$$

Всего имеется  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_K = M$  таких векторов. Вектору состояния  $\mathbf{x}_w$  и вектору решения  $\mathbf{y}_z$  соответствует результат решения  $e(\mathbf{x}_w, \mathbf{y}_z)$ , и

$$V_z V_w e(\mathbf{y}_z, \mathbf{x}_w)$$

есть множество всех  $NM$  результатов решений  $e_i$ , соответствующих всем мыслимым значениям всех параметров, характеризующих внешние условия и наши решения.

Когда при многократной реализации какого-либо решения вновь появляются различные и неизвестные до того значения некоторого независимого параметра, то мы имеем дело со стохастическим поведением окружения. Интервал  $[x, \hat{x}]$  содержит теперь возможные реализации независимого параметра.

Если осуществляется  $RZ$  реализаций, при которых внешние состояния  $\mathbf{x}_w$  встречаются по  $RZ_w$  раз соответственно (при этом  $\sum_w RZ_w = RZ$ ,  $RZ_w \in \{0, 1, \dots, RZ\}$ ), то, выбирая вариант решения  $\mathbf{y}_z$ , мы получим средний результат

$$e_i(RZ) = \sum_w e(\mathbf{y}_z, \mathbf{x}_w) \frac{RZ_w}{RZ}.$$

Смешанные, т. е. встречающиеся с различными вероятностями, состояния окружения могут быть в своем стохастическом поведении проанализированы и описаны тем более точно, чем больше информации содержится в проведенных экспериментах и, в особенности, чем большее число экспериментов было проведено.

Граница между детерминированным и стохастическим способами задания параметров не является четкой, и, строго говоря, всегда приходится иметь дело с заданием параметров, характеризующимся неточным распределением вероятностей.

Согласно одному известному утверждению теории вероятностей (закону больших чисел) частота появления каждого из внешних состояний стабилизируется с ростом числа наблюдений на соответствующей вероятности, т. е. при  $RZ \rightarrow \infty$  имеет место  $RZ_w/RZ \rightarrow q_w$ , так что

$$e_t(RZ) \longrightarrow e_t = \sum_w e(y_z, x_w) q_w.$$

Эффект этот должен проявляться постепенно с увеличением числа повторений, и соответствующая информация становится доступной для принимающего решение.

Для детерминированных внешних состояний об эффекте стабилизации не может быть и речи. При сколь угодно большом числе реализаций результат остается неизвестным:

$$e_t \in [\min_{z, w} e(y_z, x_w), \max_{z, w} e(y_z, x_w)].$$

Далее предполагается, что экспериментатору полностью известны

- множество всех внешних состояний;
- множество всех альтернативных решений  $E$ ;
- функция полезности  $e(y, x)$ ;
- поведение всех величин во времени.

Наконец, считается, что затраты на добывание дополнительной информации превосходят затраты, связанные с принятием решения в условиях неопределенности, включая потери в получаемом результате. В противном случае было бы целесообразно повысить уровень имеющейся информации. Часто к тому же затраты на приобретение нужной информации приходится оценивать в условиях неопределенности.

Необходимость принимать решение в условиях неопределенности может возникнуть и тогда, когда нужная информация доступна, но времени для ее добывания не хватает.

Важную роль в обеспечении эффективного принятия решений играет также знание связанных с данной ситуацией распределений вероятностей (определяемых на основе достаточно большого числа  $v$  наблюдений) и числа  $w$  повторений реализации собственно принятого решения.

Если оба числа  $v$  и  $w$  достаточно велики, то процесс принятия решения можно считать обоснованным и надежно оцененным. Если же, напротив, эти числа малы, то результат принятия решения ненадежен.

На практике, однако, часто встречается случай, когда одно из чисел  $v$  и  $w$  велико, а другое сравнительно мало, так что в результате либо распределение хорошо известно, но невелико число реализаций, либо наоборот. В обоих случаях это про-

межуточное по отношению к ранее упомянутым ситуациям положение ограничивает надежность принятия решений.

Эти соображения должны оказывать влияние на установку принимающего решение, причем она становится тем более оптимистической, чем выше уровень имеющейся информации.

## 6.2. Значимость независимого параметра

Оценочная функция

$$z = z(y_v, x_w) \quad (6.2)$$

определяется значениями векторов  $x_w = (x_1, \dots, x_L)$  независимых и  $y_v = (y_1, \dots, y_K)$  зависимых переменных. При  $K=1$  и  $L=1$  получается рассмотренный в гл. 2 и 3 случай одной независимой и одной зависимой переменных. В этом случае все результаты выводятся из соотношения

$$e_{ij} = z(y_i, x_j), \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n. \quad (6.3)$$

Интересно выяснить, как в только что описанном общем случае независимый параметр  $x_{l'}$  с его возможными значениями  $x_{l'j}$ ,  $j=1, \dots, n_{l'}$ , влияет на результат; при этом ограничимся сначала случаем одного варианта решения. Реализации параметра  $x_{l'}$  должны лежать в области

$$\min_j x_{l'j} \leq x_{l'} \leq \max_j x_{l'j}.$$

Будем считать, что все остальные независимые параметры принимают фиксированные средние значения  $\bar{x}_l$ ,  $l=1, \dots, L$ ,  $l \neq l'$ . В целях большей наглядности будем рассматривать случай единственного независимого параметра.

Влияние указанной области неопределенности параметра  $x_{l'}$  при выбранном варианте решения  $y_i$  измеряется так называемой *абсолютной релевантностью*  $R^{a_{il'}}$ :

$$R^{a_{il'}} = \frac{\max_j z(y_i, \bar{x}_1, \dots, x_{l'j}, \dots, \bar{x}_L)}{\min_j z(y_i, \bar{x}_1, \dots, x_{l'j}, \dots, \bar{x}_L)} - \frac{z(y_i, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{l'}, \dots, \bar{x}_L)}{\min_j z(y_i, \bar{x}_1, \dots, x_{l'j}, \dots, \bar{x}_L)}. \quad (6.4)$$

Здесь  $\bar{x}_{l'}$  обозначает среднее значение параметра  $x_{l'}$ . Без потери общности знаменатель может считаться отличным от нуля.

Если функция  $x_{l'j} \rightarrow z_{l'}$ , определяемая равенством

$$z_{l'} = z_{l'}(y_i, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{l'j}, \dots, \bar{x}_L)$$

монотонно возрастает, то

$$R_{ii'}^{a_{ii'}} = \frac{z(y_i, \bar{x}_1, \dots, \max_j x_{1'}', \dots, \bar{x}_L)}{z(y_i, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{1'}', \dots, \bar{x}_L)} - \frac{z(y_i, \bar{x}_1, \dots, \min_j x_{1'}', \dots, \bar{x}_L)}{z(y_i, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{1'}', \dots, \bar{x}_L)}. \quad (6.5)$$

Теперь для переменной решения  $y_i$  и параметра  $x_{1'}$  определим *относительную релевантность*, которую будем называть *коэффициентом влияния*:

$$R_{ii'}^{b_{ii'}} = \frac{R_{ii'}^{a_{ii'}}}{\sum_{l=1}^L R_{ii'}^{a_{ii'}}}. \quad (6.6)$$

Придавая переменной  $y_i$  всевозможные значения, найдем максимум коэффициента влияния параметра  $x_{1'}$ :

$$R_{1'} = \max_i R_{ii'}^{b_{ii'}}. \quad (6.7)$$

Случай большего числа переменных без труда рассматривается аналогично. Тогда вместо единственной переменной решения  $y_i$  появляются все компоненты  $y_{1k_1}, y_{2k_2}, \dots, y_{Kk_K}$ , по которым затем в формуле (6.7) берется максимум. Понятие *значимости* параметра  $x_{1'}$ , определяемое равенством

$$B_{1'} = R_{1'} H_{1'}, \quad (6.8)$$

опирается на энтропию  $H_{1'}$  (ее определение содержится в разд. 6.3) независимого параметра  $x_{1'}$ , характеризующую его информативность.

Для значимости каждого параметра в соответствии с характером задачи можно установить некоторую границу  $B_v$ , ниже которой неопределенностью параметра  $x_{1'}$  можно пренебречь. Так, при

$$B_{1'} < B_v$$

имеет смысл рассматривать  $x_{1'}$  как параметр с единственным (средним) значением  $\bar{x}_{1'}$ . Можно также установить другую границу  $B_a$ , выше которой предположения о функции распределения рассматриваемого параметра принимаются без проверки гипотезы. В отсутствие таких границ ответ на вопрос, какие из этих параметров с наименьшими последствиями в случае ошибки можно считать однозначными, дает последовательность значимостей независимых параметров.

### 6.3. Энтропия независимого параметра

Гензель [20] предложил применять шенноновскую энтропию (6.13), рассматриваемую как мера неопределенности сигнала, передаваемого случайным источником, и для измерения неопределенности.

Если параметр  $x_i$  может принимать в общей сложности  $n_i$  различных значений, каждое из которых имеет соответствующую вероятность появления  $q_{ij}$ ,  $j=1, \dots, n_i$ , то тогда мерой его неопределенности будет энтропия

$$H_i = - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij} \ln q_{ij}. \quad (6.9)$$

В связи с тем, что для всех  $j=1, \dots, n_i$  справедливо неравенство  $0 \leq q_{ij} \leq 1$ ,  $H_i$  всегда является неотрицательной величиной. В особом случае, когда одно из значений  $x_{ij}$  имеет вероятность

появления  $q_{ij} = 1$ , величина  $H_i = 0$ , так как из  $\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij} = 1$  вытекает,

что для всех  $j \neq j'$   $q_{ij} = 0$ , т. е.  $x_i$  принимает только одно значение  $x_{ij'}$ , и тем самым неопределенности не существует. С другой стороны,  $H_i$  будет иметь максимальную величину, когда все  $n_i$  значений параметра  $x_i$  равновероятны:  $q_{ij} = 1/n_i$ , где  $j=1, \dots, n_i$ . В этом случае ни одно из возможных значений параметра не имеет приоритета по отношению к другим, и, таким образом, речь идет о полной неопределенности.

Рис. 6.2 отражает график изменения величины энтропии двух возможных значений независимого параметра в зависимости от вероятностей появления обоих этих значений. Непосредственный перенос формулы (6.9) на случай бесконечно большого числа возможных значений параметра невозможен, так как при этом величина  $H_i$  стремится к бесконечности, поскольку неопределенность в этом случае и в самом деле неограниченно возрастает. Это же явление наблюдается при дискретизации какой-либо непрерывной функции плотности распределения вероятностей, когда непрерывное распределение приближенно заменяется дискретным, а для последнего по формуле (6.9) вычисляется энтропия, которая затем, путем последовательного измельчения интервалов дискретности, постоянно уточняется. При использовании непрерывного закона распределения с бесконечной областью значений случайной величины, например, нормального распределения в области  $(-\infty, +\infty)$  или распределения по экспоненциальному закону в области  $(0, \infty)$ , перед дискретизацией данная область ограничивается путем отсечения на ее краях бесконечных интервалов значений с очень малыми вероятностями реализации.

Таким образом, даже и в таких случаях можно иметь дело с конечной областью значений случайной величины.

Если, например, для параметра  $x_i$  с конечной областью изменения значений  $[\min_j x_{ij}, \max_j x_{ij}]$  эта область разбивается на  $n_i$  интервалов длиной  $\Delta_i$  и каждому  $j$ -му интервалу, в соответствии с изменением на нем плотности вероятностей,

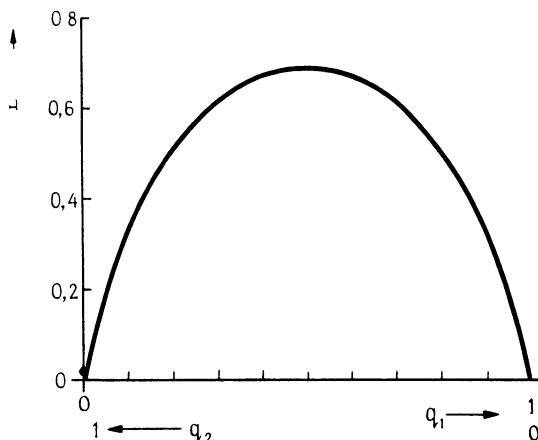


Рис. 6.2. Энтропия двух состояний одного параметра.

приписывается своя вероятность реализации  $q_{ij}$  значений параметра, так что  $\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij} = 1$ , то справедливо выражение

$$n_i \Delta_i = \max_j x_{ij} - \min_j x_{ij}. \quad (6.10)$$

Согласно (6.9) после такой дискретизации можно определить соответствующую величину энтропии:

$$H_i(\Delta_i) = - \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij} \ln q_{ij}.$$

На рис. 6.3 показаны графики изменения энтропии  $H(\Delta_i)$  нормально распределенного дискретизированного параметра в зависимости от величины интервала дискретизации  $\Delta_i$  при различных значениях среднеквадратического отклонения  $\sigma$ . Выбор ширины интервала  $\Delta_i$  связан с требованиями к процедуре дискретизации непрерывно распределенного независимого параметра  $x_i$  и будет обсужден в гл. 9.

Для приближенного вычисления энтропии непрерывно распределенного параметра  $x_i$  по заданной функции плотности

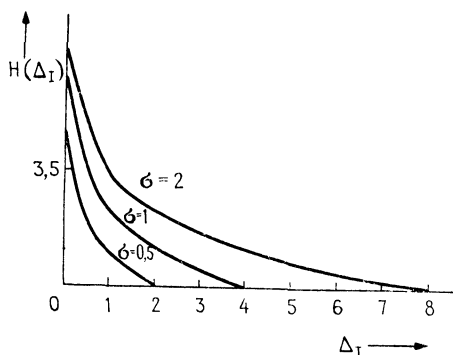


Рис. 6.3. Зависимость энтропии нормально распределенного параметра от величины интервала и среднеквадратического отклонения [20].

вероятностей  $f_i(x)$  определим сначала, используя значения параметра  $x_{ij}$  на каждом соответствующем  $j$ -м интервале, вероятность реализации каждого из этих значений:

$$q_{ij} = f_i(x_{ij}) \Delta_i, \quad j=1, \dots, n_i. \quad (6.11)$$

Тогда, подставляя это выражение в формулу (6.9), получим

$$H_i(\Delta_i) = - \sum_{j=1}^{n_i} f_i(x_{ij}) \Delta_i \ln(f_i(x_{ij}) \Delta_i),$$

а с учетом того, что  $\sum_{j=1}^{n_i} q_{ij} = 1$ , выражение для энтропии примет вид

$$H_i(\Delta_i) = - \sum_{j=1}^{n_i} f_i(x_{ij}) \ln(f_i(x_{ij})) \Delta_i - \ln \Delta_i. \quad (6.12)$$

При  $n_i \rightarrow \infty$ , что, согласно (6.10), равнозначно  $\Delta_i \rightarrow 0$ , первый член предыдущего выражения стремится к интегралу

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \ln f_i(x) dx.$$

Полагая, наконец,

$$\tilde{H}_i(\Delta_i) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \ln f_i(x) dx - \ln \Delta_i, \quad (6.13)$$

получим

$$\tilde{H}_i(\Delta_i)/H_i(\Delta_i) = 1 \quad \text{при} \quad \Delta_i \rightarrow 0.$$

Таким образом, для достаточно малых значений  $\Delta_i$  функцию



$H_i$  можно считать аппроксимацией выражения для  $H_i(\Delta_i)$  и тем самым рассматривать ее в качестве выражения для энтропии дискретизированного распределения с непрерывной функцией плотности вероятностей  $f_i(x)$ .

Первый член правой части выражения (6.13) отражает влияние на величину энтропии со стороны вероятностного распределения, заданного функцией его плотности  $f_i(x)$ ; мы будем называть его *главной составляющей энтропии*; в инженерной практике, и прежде всего в электротехнике, ее часто называют *дифференциальной энтропией*. Второй член —  $\ln \Delta_i$ , не зависящий от типа вероятностного распределения, обуславливает неограниченное возрастание энтропии при неограниченном измельчении интервала дискретности.

В табл. 6.2 приведены приближенные выражения для некоторых часто используемых функций распределения, а также ошибки приближения в зависимости от числа интервалов.

Если имеющаяся информация о рассматриваемом вероятностном распределении недостаточна для его оценки, то, следуя принципу гарантированности результата, содержащемуся в минимаксном критерии, с учетом установленных на основе этой информации дополнительных условий ( $NB$ ) можно определить максимально возможное значение энтропии. Таким образом, при непрерывном законе распределения из системы

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) \ln f_i(x) dx \rightarrow \max$$

$$\text{и } \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x) dx = 1 \wedge (NB)$$
(6.14)

определяется вид закона распределения и соответствующая ему главная составляющая энтропии.

В табл. 6.3 для трех случаев, для которых в качестве дополнительных условий заданы области распределения параметров (а в третьем случае также среднее значение и среднеквадратическое отклонение), представлены соответствующие этим законам распределения выражения для главной составляющей максимальной энтропии.




Энтропию параметров в технических задачах, а также значимость  $B$  этих параметров можно определять описанным методом в случаях, когда параметры представлены только в виде дискретного либо только непрерывного распределения. Так как в общем случае величина интервалов дискретизации задается произвольно (как правило, исходя из ограничений на вычислительные затраты), величины энтропий, рассчитанные таким методом, нельзя без дополнительных оценок считать равными

Таблица 6.2. Ошибки приближения (6.13) для некоторых функций распределения

		Ошибка $\tilde{H}(\Delta) - H(\Delta)$ , %									
Нормальное распределение		Распределение Вейбулла									
Функция плотности распределения $f_N(x) = e/\sqrt{2\pi\sigma} = (x-\mu)^{2/2\sigma^2}$		Функция плотности распределения $f_B(x) = \eta^\delta \delta x^{\delta-1} e^{-x^\delta \eta^\delta}$									
Аппроксимация $H_N = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2 / \Delta}$		Аппроксимация $H_B = \ln(e \eta^\delta \delta \Delta) + (\delta-1)/\delta$									
Параметры распределения $\sigma=1, \mu=0$		Параметры распределения									
Область распределения $[-5...+5]$											
Число интер- валов $n$	$\eta^\delta=2$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=0,5$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$	$\eta^\delta=1$
	$\delta=1,5$	$\delta=1,5$	$\delta=1,5$	$\delta=0,5$	$\delta=0,5$	$\delta=1^*$	$\delta=2$	$\delta=3$	$\delta=3$	$\delta=3$	$\delta=3$
	—127,5	—	—	—	—	—1615	—	—	—	—	—
	—43,7	—2687	—	—	—118	228	—	—	—	—	—
	—33,9	—236	—	—	—68,3	72,9	—	—	—	—	—
	—15,6	—58,6	—	—	—44,8	33,0	207	—	—	—	—
	—10,4	—25,5	—250	—76,6	—31,4	18,1	63,7	509	84,6	84,6	84,6
	—4,9	—10,5	—20,7	—17,2	—17,2	7,4	29,0	56,7	56,7	56,7	56,7
	—2,7	—6,3	—10,7	—10,0	—10,0	3,9	18,6	9,1	9,1	9,1	9,1
	—0,5	—1,6	—2,5	—1,8	—1,8	0,6	4,0	0,5	0,5	0,5	0,5
	—0,005	—0,3	—0,5	—0,9	—0,9	0,04	0,5	0,9	0,9	0,9	0,9

\* Экспоненциальное распределение

Таблица 6.3. Максимальная энтропия при заданных законах плотностей распределения вероятностей и дополнительных условиях

Дополнительные условия	Закон плотности распределения	Главная составляющая энтропии	График плотности распределения
$\checkmark x \leq x \leq \checkmark x$	$f(x) = \frac{1}{\checkmark x - \checkmark x}$	$H = \ln(\checkmark x - \checkmark x)$	
$0 \leq x \leq \infty, \bar{x}$	$f(x) = \frac{1}{\bar{x}} e^{-x/\bar{x}}$	$H = 1 + \ln \bar{x}$	
$-\infty < x < +\infty, \bar{x}, \sigma$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$H = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2}$	

энтропии, соответствующей непрерывному распределению. Если для какого-либо непрерывного распределения задано по крайней мере одно эквидистантное дискретное распределение, то величину интервала дискретности дискретного параметра можно принять за опорную при дальнейшем расчете энтропий других непрерывных параметров.

Если в условиях задачи даны различные дискретные параметры наряду с непрерывными, то общего подхода для всех конкретных случаев просто не существует. Если же удастся перевести дискретное распределение в непрерывное, то в этом случае можно применить знакомый нам метод разбиения области распределения параметра на  $n_i$  интервалов величиной  $\Delta_i$ .

По величине значимости  $B$  определяется число интервалов  $n_i$  дискретизации непрерывного параметра, что подробнее будет описано в разд. 9.5. Однако точность необходимых приближений не следует задавать слишком высокой, так как обычно число интервалов разбиения  $n_i$  не оказывает сильного влияния на результат, а наша цель состоит в рассмотрении распределения одного значимого параметра из ограниченного вычислительными затратами числа  $N$  оцениваемых параметров внешних условий среди  $L$  неизвестных параметров.

#### 6.4. Доверительные факторы

В основе излагаемых ниже рассуждений о ситуациях принятия решения, связанных с определенной степенью риска, лежит предположение о том, что решение, соответствующее наименьшему значению  $\min_i x_j$  из соответствующей выборки или ряда допустимых значений независимого параметра  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , приводит к самым неблагоприятным последствиям. Кроме того, предполагается, что данные значения параметра являются реализацией случайного процесса с соответствующими относительными частотами распределения  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , которые, в свою очередь, сходятся к (теоретическим) вероятностям  $p_1, p_2, \dots, p_n$  этих значений параметра. Средняя величина заданного ряда значений независимого параметра должна существенно отличаться от наименьшего из его значений  $\min_i x_j$ , что характеризуется так называемым *доверительным фактором*, объективно оцениваемым заранее задаваемой величиной вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения. Здесь следует различать три принципиально разных случая:

1. На основании заранее известной выборки значений параметра или по результатам проведения  $v$  экспериментов по определению его значений оценивается относительная величина

отклонения теоретического среднего значения параметра от его наименьшего значения; это осуществляется с помощью *эмпирического доверительного фактора*  $V_v(\alpha)$ .

2. Если вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_n$  известны, то оценивается относительная величина отклонения среднего значения из выборки, полученной в результате проведения серии из  $w$  экспериментов, от наименьшего значения параметра; при этом используется *прогностический доверительный фактор*  $V^w(\alpha)$ .

3. Относительная величина отклонения среднего значения параметра от его наименьшего значения оценивается для предстоящего проведения серии из  $w$  экспериментов по результатам заранее известной выборки, состоящей из  $v$  экспериментов; это осуществляется с помощью *эмпирико-прогностического доверительного фактора*  $V_v^w(\alpha)$ .

Последний из названных подходов охватывает задачи обеих упомянутых выше категорий и к тому же лучше других соответствует задачам, встречающимся на практике. Далее будет дан анализ характеристик и взаимосвязи указанных доверительных факторов. Будем также считать, что значения параметра расположены в ряде по мере их возрастания, т. е.  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , так что  $\min_j x_j = x_1$ .

#### 6.4.1. Эмпирический доверительный фактор

Эмпирический доверительный фактор, определяемый по результатам выборки, состоящей из  $v$  экспериментов, с учетом вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения задается соотношением

$$V_v(\alpha) = [\tilde{M}_v(\alpha) - x_1] / (M_v - x_1). \quad (6.15)$$

Здесь  $x_1$  — минимальное значение параметра из ряда  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $M_v = \sum_{j=1}^n h_j x_j$  — эмпирическое среднее значение параметра, где  $h_j$  — относительная частота реализации значения параметра  $x_j$ , поэтому  $\sum_{j=1}^n h_j = 1$ .

Величина  $\tilde{M}_v(\alpha) = \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) x_j$  представляет собой наиболее неблагоприятное, т. е. наименьшее из реально возможных среднее значение параметра, которое вычисляется на основании частотного распределения выборки параметров ( $h_1, h_2, \dots, h_n$ ) и вероятности принятия ошибочного решения  $\alpha$ , причем теоретическое распределение вероятностей ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) неизвестно. Коэффициенты  $\tilde{h}_{v,j}(\alpha)$  задаются исходя из индивидуального оценивания значений вероятности  $p_j$  с учетом допуска  $\alpha$  на ее

ошибочное оценивание. При этом, конечно, справедливы выражения

$$0 \leq \tilde{h}_{v,j}(\alpha) \leq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) = 1.$$

Необходимо учитывать, что наиболее неблагоприятным является тот случай, когда малым значениям параметра из ряда  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответствуют наибольшие вероятности в рамках указанного выше индивидуального оценивания. Обозначив через  $H_j$  такую случайную величину, реализацией которой служит относительная частота  $h_j$ , получим величину  $k_j = h_j v$ , подчиняющуюся биномиальному закону распределения  $B(k_j, v, p_j)$  с параметрами  $v$  и  $p_j$ . Согласно этому закону из уравнения  $B(k_1, v, \hat{p}_1) = 1 - \varepsilon = \alpha$ , где  $k_1 = v h_1$ , получим сначала для вероятности  $\hat{p}_1$  индивидуальную оценку полуинтервала  $[0, \hat{p}_1]$  с учетом допуска на ошибку оценивания  $\varepsilon = 1 - \alpha$ . Значение  $\hat{p}_1$  можно взять из таблицы биномиального закона распределения (см., например, [21]). Кроме того, справедливо выражение

$$\hat{p}_1 = \frac{(k_1 + 1) F_{m_1, m_2; \varepsilon}}{v - k_1 + (k_1 + 1) F_{m_1, m_2; \varepsilon}}, \quad \text{где} \quad \begin{matrix} m_1 = 2(k_1 + 1), \\ m_2 = 2(v - k_1). \end{matrix} \quad (6.16)$$

Квантиль  $F_{m_1, m_2; \varepsilon}$  биномиального закона распределения определяется из статистических таблиц (см., например, [21]).

Двусторонняя индивидуальная оценка интервала  $[\hat{p}_j, \hat{p}_j]$ ,  $j = 2, \dots, n$ , для вероятности  $p_j$  также определяется из таблицы (см. [21]).

С целью упрощения методики получения доверительных оценок биномиальный закон распределения можно заменить асимптотически приближающим его нормальным законом распределения, однако для этого необходимо иметь достаточно большой объем  $v$  выборки реализаций параметра.

В этом случае

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{1}{v + z_{1-\alpha}^2} \left( k_1 + \frac{z_{1-\alpha}^2 - \alpha}{2} + z_{1-\alpha} \sqrt{\frac{k_1(v - k_1)}{v} + \frac{z_{1-\alpha}^2 - \alpha}{4}} \right), \\ \tilde{p}_j, \hat{p}_j &= \frac{1}{v + z_{1-\alpha/2}^2} \left( k_j + \frac{z_{1-\alpha/2}^2 - \alpha/2}{2} \mp z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{k_j(v - k_j)}{v} + \frac{z_{1-\alpha/2}^2 - \alpha/2}{4}} \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$j = 2, \dots, n.$$

Здесь  $k_j = v h_j$ , где  $j = 1, 2, \dots, n$ , а  $z_{1-\alpha}$  и  $z_{1-\alpha/2}$  представляют собой квантили порядка, соответственно,  $1 - \alpha$  и  $1 - \alpha/2$  стандартного нормального распределения. Величины этих квантилей указываются в таблицах, приводимых в широко распространен-

ной литературе по теории вероятностей и статистике, например, в работе [21]. В последнем из выражений (6.17) знак «минус» справедлив при вычислении  $\tilde{p}_j$ , а знак «плюс» — при вычислении  $\hat{p}_j$ .

Весовые коэффициенты  $\tilde{h}_{v,j}(\alpha)$ ,  $j=1, \dots, n$ , определим индуктивно:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{v,1}(\alpha) &:= \hat{p}_1, \\ \tilde{h}_{v,j}(\alpha) &:= \min \left[ \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{j-1} \tilde{h}_{v,t}(\alpha) - \sum_{t=j+1}^n \tilde{p}_t \right\}, \hat{p}_j \right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$j=2, \dots, n-1$$

$$\tilde{h}_{v,n}(\alpha) := \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{n-1} \tilde{h}_{v,t}(\alpha) \right\}.$$

При этом, естественно, выполняются условия  $0 \leq \tilde{h}_{v,j}(\alpha) \leq 1$  и  $\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) = 1$ , а также определено значение  $\tilde{M}_v(\alpha) = \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) x_j$ . При стремлении объема выборки к бесконечности, т. е. при  $v \rightarrow \infty$ , согласно закону больших чисел (с вероятностью 1), асимптотически выполняются следующие соотношения:  $\hat{p}_1 \rightarrow p_1$ ;  $\tilde{p}_j, \hat{p}_j \rightarrow p_j$ ;  $\tilde{h}_{v,j}(\alpha) \rightarrow p_j$ ;  $h_j \rightarrow p_j$ ; отсюда следует, что при  $v \rightarrow \infty$   $V_v(\alpha) \rightarrow 1$ , т. е. при неограниченном возрастании объема выборки ( $v \rightarrow \infty$ ) эмпирический доверительный фактор стремится к единице. Очевидно, что сохраняется условие

$$0 \leq V_v(\alpha) \leq 1.$$

Из приведенных выше формул (6.16) и (6.17) следует, что с уменьшением объема выборки до нуля эмпирический доверительный фактор также стремится к нулю, что математически записывается так:  $\lim_{v \rightarrow 0} V_v(\alpha) = 0$ .

С учетом равенств  $\sum_{j=1}^n h_j = 1$  и  $\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) = 1$  выражение (6.15) можно представить в виде

$$V_v(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}(\alpha) (x_j - x_1)}{\sum_{j=1}^n h_j (x_j - x_1)}. \quad (6.19)$$

Для частного случая  $n=2$  выражение (6.19) приобретает простой вид

$$V_v(\alpha) = \tilde{h}_{v,2}(\alpha) / h_2 = (1 - \hat{p}_1) / h_2 = (1 - \hat{p}_1) / (1 - h_1) \quad (6.20)$$

Таблица 6.4. Квантили  $z_\alpha$  для практических значений вероятностей принятия ошибочного решения по стандартному нормальному закону распределения при эмпирическом доверительном факторе  $V_0(\alpha)$ .  
Случай  $n=2$  при  $\alpha=0,01$  и  $0,1$

$\alpha \backslash v$	$\alpha=0,01$										$\alpha$	$z_{1-\alpha/2}$
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9		
1	0,1567	1413	1262	1114	0966	0817	0665	0510	0349	0180	0	0,001
10	0,501	5934	5452	5001	4552	4085	3577	3001	2306	1395	0	0,005
20	7879	7256	6769	6319	5870	5395	4865	4239	3437	2271	0	0,01
30	8479	7859	7398	6975	6552	6100	5588	4971	4154	2896	0	0,025
40	8814	8210	7777	7381	6984	6556	6068	5471	4665	3375	0	3,3
50	9028	8443	8035	7663	7287	6883	6417	5842	5055	3759	0	2,81
60	9177	8610	8224	7872	7516	7131	6686	6132	5365	4077	0	2,61
70	9286	8737	8370	8035	7696	7328	6901	6367	5621	4346	0	2,4
80	9370	8837	8486	8166	7842	7489	7079	6562	5836	4578	0	0,001
90	9436	8919	8582	8275	7964	7625	7228	6728	6021	4782	0	0,005
100	9489	8986	8662	8367	8068	7740	7357	6872	6182	4962	0	0,01
1	0,3790	3430	3094	2770	2448	2120	1777	1411	1007	0548	0	0,05
10	8592	7976	7523	7109	6693	6248	5743	5131	4316	3045	0	0,1
20	9243	8686	8311	7969	7624	7248	6814	6271	5516	4236	0	0,2
30	9482	8977	8652	8355	8054	7724	7339	6852	6160	4937	0	0,001
40	9607	9141	8850	8584	8313	8016	7667	7221	6579	5418	0	0,005
50	9683	9249	8982	8740	8492	8219	7896	7482	6882	5777	0	0,01
60	9734	9326	9079	8854	8624	8370	8069	7680	7114	6058	0	0,025
70	9771	9384	9153	8942	8727	8488	8204	7837	7299	6287	0	3,3
80	9799	9430	9212	9013	8809	8583	8314	7966	7452	6478	0	2,81
90	9821	9468	9261	9072	8878	8663	8406	8073	7581	6641	0	2,61
100	9839	9449	9302	9121	8936	8730	8485	8165	7691	6782	0	2,4



и, следовательно, не зависит от значений самих параметров  $x_1$  и  $x_2$ .

В табл. 6.4 представлены значения  $V_v(\alpha)$  для частного случая  $n=2$  при изменении  $v$  от 1 до 100 и  $h$  от 0 до 1, с  $\alpha=0,01$  и  $\alpha=0,1$ . Кроме того, в таблице приведены значения квантилей  $z_{1-\alpha/2}$  в зависимости от  $\alpha$ . Результаты, приведенные в таблице, можно получить из выражения (6.20), принимая  $h_2=h$ .

#### 6.4.2. Прогностический доверительный фактор

Прогностический доверительный фактор определяется для серии из  $w$  реализаций с учетом вероятности  $\alpha$  ошибки по формуле

$$V^w(\alpha) = \frac{\bar{M}^w(\alpha) - x_1}{\mu - x_1}. \quad (6.21)$$

Здесь  $x_1$  — минимальное значение параметра из ряда  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Выражение  $\mu = \sum_{j=1}^n p_j x_j$  определяет среднее значение параметра  $x$ , заданного рядом  $x_j, j=1, \dots, n$ . Параметр  $x$  считается случайной величиной с (теоретическими) вероятностями  $p_j$  его возможных значений, так что  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ . Величина  $\bar{M}^w(\alpha) = \sum_{j=1}^n \bar{h}_j^w(\alpha) x_j$  представляет собой наиболее неблагоприятное, т. е. наименьшее из реально возможных среднее значение параметра, которое может быть получено в серии из  $w$  реализаций; оно вычисляется на основании известного вероятностного распределения значений параметра ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) и вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения. Коэффициенты  $\bar{h}_j^w(\alpha)$  определяются на основании оценки вероятностей  $p_1, \dots, p_n$ , причем, естественно, выполняются соотношения  $0 \leq \bar{h}_j^w(\alpha) \leq 1$  и  $\sum_{j=1}^n \bar{h}_j^w(\alpha) = 1$ . В этом случае, как и при рассмотрении эмпирического доверительного фактора, необходимо помнить, что наиболее неблагоприятным является тот случай, когда малым значениям параметра из ряда  $x_1, x_2, \dots, x_n$  соответствуют наибольшие относительные частоты реализаций с учетом заданной вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения. Обозначим через  $H_j$  случайную величину, реализация которой есть число  $h_j$  появлений элемента  $x_j$ , наблюдаемых при  $w$ -кратном повторении рассматриваемого случайного события. Тогда  $H_j$  имеет биномиальное распределение  $B(h_j, w, p_j)$  с параметрами  $w$  и  $p_j$ .

Для  $j=1$  будем исходить из равенства

$$P(p_1 + u_{1,\alpha} \leq H_1/\omega) = \alpha$$

или

$$P(H_1 < \omega(p_1 + u_{1,\alpha})) = 1 - \alpha.$$

Квантиль  $q_{1,1-\alpha}$  биномиального распределения  $B(h, \omega, p_1)$  определяется из таблиц, после чего из соотношения

$$p_1 + u_{1,\alpha} = q_{1,1-\alpha}/\omega =: \hat{h}^{\omega}_{1\alpha} \quad (6.22)$$

вычисляется величина  $\hat{h}^{\omega}_{1\alpha}$ . Аппроксимируя биномиальный закон распределения нормальным, величину  $\hat{h}^{\omega}_{1\alpha}$  можно получить, используя квантиль  $z_{1-\alpha}$  порядка  $1-\alpha$  стандартного нормального распределения

$$p_1 + z_{1-\alpha} \sqrt{p_1(1-p_1)}/\omega =: \hat{h}^{\omega}_{1\alpha}. \quad (6.23)$$

Для  $j=2, \dots, n$  справедливо равенство

$$P(p_j - \check{u}_{j,\alpha} < H_j/\omega < p_j + \hat{u}_{j,\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Используя квантили  $q_{j,\alpha/2}$  и  $q_{j,1-\alpha/2}$  порядка  $\alpha/2$  и, соответственно,  $1-\alpha/2$  биномиального закона распределения, получаем выражение для граничных значений коэффициентов

$$\begin{aligned} p_j - \check{u}_{j,\alpha} &= q_{j,\alpha/2}/\omega =: \check{h}^{\omega}_{j,\alpha/2}, \quad p_j + \hat{u}_{j,\alpha} = \\ &= q_{j,1-\alpha/2}/\omega =: \hat{h}^{\omega}_{j,\alpha/2}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

а при аппроксимации нормальным распределением с квантилями  $z_{\alpha/2}$  и  $z_{1-\alpha/2}$  порядка  $\alpha/2$  и, соответственно,  $1-\alpha/2$  получаем

$$\check{u}_{j,\alpha} = -z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{\omega}}, \quad \hat{u}_{j,\alpha} = z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{\omega}}, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} p_j + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{\omega}} &=: \check{h}^{\omega}_{j,\alpha/2}, \quad p_j + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p_j(1-p_j)}{\omega}} = \\ &=: \hat{h}^{\omega}_{j,\alpha/2}. \end{aligned}$$

Весовые коэффициенты  $\check{h}^{w_j}(\alpha)$ ,  $j=1, \dots, n$ , как и для выражения (6.18), определяются индуктивно:

$$\check{h}^{w_1}(\alpha) := \hat{h}^{w_1}_{1,\alpha},$$

$$\check{h}^{w_j}(\alpha) := \min \left[ \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{j-1} \check{h}^{w_t}(\alpha) - \sum_{t=j+1}^n \check{h}^{w_t}_{j,\alpha/2} \right\}, \hat{h}^{w_j}_{j,\alpha/2} \right], \quad (6.26)$$

$$j=2, \dots, n-1$$

$$\check{h}^{w_n}(\alpha) := \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{n-1} \hat{h}^{w_t}(\alpha) \right\}.$$

При этом выполняются условия  $0 \leq \tilde{\kappa}_j^w(\alpha) \leq 1$ ,  $\sum_{j=1}^n \tilde{\kappa}_j(\alpha) = 1$  и среднее значение определяется равенством

$$\tilde{M}^w(\alpha) = \sum_{j=1}^n \tilde{h}^w_j(\alpha) x_j.$$

При стремлении к бесконечности числа реализаций ( $w \rightarrow \infty$ ) согласно закону больших чисел (с вероятностью 1) выполняются следующие асимптотические соотношения:

$$\hat{h}^{w, \alpha} \rightarrow p_1, \quad \check{h}^{w, \alpha/2} \rightarrow p_j, \quad \hat{h}^{w, \alpha/2} \rightarrow p_j, \quad \tilde{h}^w_j(\alpha) \rightarrow p_j,$$

а из них следует, что  $V^w(\alpha) \rightarrow 1$  при  $w \rightarrow \infty$ , т. е. при неограниченном возрастании числа реализаций ( $w \rightarrow \infty$ ) прогностический доверительный фактор стремится к единице. Естественно, сохраняется условие  $0 \leq V^w(\alpha) \leq 1$ .

Из представленных выше формул (6.22) и (6.24) следует, что с уменьшением числа реализаций  $w$  до единицы прогностический доверительный фактор монотонно стремится к нулю, что математически записывается так:  $V^w(\alpha) \rightarrow 0$  при  $w \rightarrow 1$ . С учетом равенств  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$  и  $\sum_{j=1}^n \tilde{\kappa}_j^w(\alpha) = 1$  выражение (6.21) можно записать в виде

$$V^w(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{h}_j^w(\alpha) (x_j - x_1)}{\sum_{j=1}^n p_j (x_j - x_1)}. \quad (6.27)$$

Для частного случая  $n=2$  выражение (6.27) приобретает простой вид

$$V^w(\alpha) = \frac{\tilde{h}_2^w(\alpha)}{p_2} = \frac{1 - \tilde{h}_1^w(\alpha)}{p_2} = \frac{1 - \tilde{h}_1^w(\alpha)}{1 - p_1}. \quad (6.28)$$

#### 6.4.3. Эмпирико-прогностический доверительный фактор

Эмпирико-прогностический доверительный фактор определяется на основании значений параметров из ранее полученной выборки объемом  $v$  с учетом предстоящего проведения серии из  $w$  экспериментов и вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения по формуле

$$V_v^w(\alpha) = \frac{\tilde{M}_v^w(\alpha) - x_1}{M_v - x_1}. \quad (6.29)$$

Здесь, как и в случае эмпирического доверительного фактора,  $x_1$  представляет собой минимальное значение параметра из

ряда  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $M_v = \sum_{j=1}^n h_j x_j$  — среднее значение эмпирического ряда, где  $h_j$  — относительная частота реализации значения  $x_j$  в выборке объемом  $v$  экспериментов; кроме того, справедливо равенство  $\sum_{j=1}^n h_j = 1$ . Величина  $\tilde{M}^w_v(\alpha) = \sum_{j=1}^n \tilde{h}^w_{v,j} x_j$  представляет собой наиболее неблагоприятное, т. е. наименьшее из реально возможных среднее значение параметра, которое рассчитывается на основании данных выборки  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , т. е. без знания (теоретического) распределения вероятностей  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  для случая  $w$ -кратной реализации процесса с учетом вероятности  $\alpha$  ошибки. Коэффициенты  $\tilde{h}^w_{v,j}$  определяются из соответствующих величин для эмпирического и прогностического доверительных факторов. С одной стороны, применяя биномиальное распределение, можно получить более точные значения этих величин. При этом в формуле (6.22) вместо вероятности  $p_1$  следует использовать значение  $\hat{p}_1$ , полученное из выражения (6.16). С другой стороны, при аппроксимации нормальным распределением, что в свою очередь предполагает достаточно большие значения величин  $v$  и  $w$ , из выражений (6.17) и (6.23) получаем

$$\hat{p}_1 + z_{1-\alpha} \sqrt{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)/w} = : \hat{h}^w_{v,1,\alpha}, \quad (6.30)$$

а для  $j=2, \dots, n$  согласно (6.17) и (6.25) получаем

$$\tilde{p}_j + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\tilde{p}_j(1-\tilde{p}_j)}{w}} = : \tilde{h}^w_{v,j,\alpha/2}, \quad (6.31)$$

$$\hat{p}_j + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_j(1-\hat{p}_j)}{w}} = : \hat{h}^w_{v,j,\alpha/2}.$$

Здесь  $z_{1-\alpha}$ ,  $z_{\alpha/2}$  и  $z_{1-\alpha/2}$  — квантили стандартного нормального распределения порядков, соответственно,  $1-\alpha$ ,  $\alpha/2$  и  $1-\alpha/2$ .

Весовые коэффициенты  $\tilde{h}^w_{v,j}(\alpha)$ ,  $j=1, \dots, n$ , аналогично (6.18) и (6.26), определяются индуктивно:

$$\begin{aligned} \tilde{h}^w_{v,1}(\alpha) &:= \hat{h}^w_{v,1}(\alpha), \\ \tilde{h}^w_{v,j}(\alpha) &:= \min \left[ \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{j-1} \tilde{h}^w_{v,t}(\alpha) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{t=j+1}^n \tilde{h}^w_{v,t,\alpha/2} \right\}, \hat{h}^w_{v,j,\alpha/2} \right], \\ j &= 2, \dots, n-1 \\ \tilde{h}^w_{v,n}(\alpha) &:= \max \left\{ 0, 1 - \sum_{t=1}^{n-1} \tilde{h}^w_{v,t}(\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

При этом выполняются соотношения  $0 \leq \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) \leq 1$ ,  $\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) = 1$  и определяется величина

$$\tilde{M}_v^w(\alpha) = \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) x_j.$$

Теперь рассмотрим асимптотические приближения при  $w \rightarrow \infty$  и  $v \rightarrow \infty$ . Согласно закону больших чисел (с вероятностью 1) при  $w \rightarrow \infty$  имеем:

$$\hat{h}_{v,1,\alpha}^w \rightarrow \hat{p}_1, \quad \check{h}_{v,j,\alpha/2}^w \rightarrow p_j, \quad \hat{h}_{v,j,\alpha/2}^w \rightarrow \hat{p}_j, \\ \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) \rightarrow \tilde{h}_{v,j}(\alpha),$$

$\tilde{M}_v^w(\alpha) \rightarrow \tilde{M}_v(\alpha)$  и, тем самым,  $V_v^w(\alpha) \rightarrow V_v(\alpha)$  при  $w \rightarrow \infty$ . Соответственно при  $v \rightarrow \infty$  получаем

$$\hat{h}_{v,1,\alpha}^w \rightarrow \hat{h}_{1,\alpha}^w, \quad \check{h}_{v,j,\alpha/2}^w \rightarrow \check{h}_{j,\alpha/2}^w, \\ \hat{h}_{v,j,\alpha/2}^w \rightarrow \hat{h}_{j,\alpha/2}^w, \quad \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) \rightarrow \tilde{h}_j^w(\alpha),$$

$h_j \rightarrow p_j$ ,  $M_v \rightarrow \mu$ ,  $\tilde{M}_v^w(\alpha) \rightarrow \tilde{M}^w(\alpha)$  и, следовательно,  $V_v^w(\alpha) \rightarrow V^w(\alpha)$  при  $v \rightarrow \infty$ . При  $v \rightarrow \infty$  и  $w \rightarrow \infty$  получаем

$$\lim_{\substack{v \rightarrow \infty \\ w \rightarrow \infty}} \tilde{M}_v^w(\alpha) = \lim_{w \rightarrow \infty} \tilde{M}^w(\alpha) = \lim_{v \rightarrow \infty} \tilde{M}_v(\alpha) = 1,$$

т. е. при одновременном неограниченном возрастании объема выборки  $v \rightarrow \infty$  и числа реализаций процесса  $w \rightarrow \infty$  эмпирико-прогностический доверительный фактор стремится к единице. Очевидно, что справедливо неравенство  $0 \leq V_v^w(\alpha) \leq 1$ .

С другой стороны, при постепенном уменьшении объема выборки  $v$  до нуля или числа реализаций процесса  $w$  до единицы эмпирико-прогностический доверительный фактор монотонно стремится к нулю:  $V_v^w(\alpha) \downarrow 0$  при  $v \downarrow 0$  и  $w \downarrow 1$ . С учетом равенств  $\sum_{j=1}^n \tilde{h}_j = 1$  и  $\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) = 1$  выражение (6.29) можно представить в виде

$$V_v^w(\alpha) = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha) (x_j - x_1)}{\sum_{j=1}^n h_j (x_j - x_1)}. \quad (6.33)$$

Отсюда для частного случая  $n=2$  выражение (6.33) приобретает простой вид

$$V_v^w(\alpha) = \frac{\tilde{h}_{v,2}^w(\alpha)}{h_2} - \frac{1 - \tilde{h}_{v,1}^w(\alpha)}{1 - h_1}. \quad (6.34)$$

#### 6.4.4. Использование доверительных факторов в задачах принятия решения

Введенные выше доверительные факторы были получены для ряда значений одного параметра. При наличии нескольких вариантов решения  $E_i$ ,  $i=1, \dots, m$  в зависимости от значений внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$  каждому из  $m$  вариантов будет соответствовать свой ряд значений полезности решения  $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$  и, таким образом, свои эмпирический  $V_v(\alpha)_i$  (разд. 6.4.1), прогностический  $V^w(\alpha)_i$  (разд. 6.4.2) и эмпирико-прогностический  $V^{vw}(\alpha)_i$  (разд. 6.4.3) доверительные факторы. Порядок определения значений этих доверительных факторов и их свойства описаны в указанных соответствующих разделах этой главы. Сопоставим еще раз формулы, отражающие асимптотические свойства доверительных факторов, которые потребуются при дальнейшем изложении материала:

$$V_v(\alpha)_i \begin{cases} 1 \uparrow & \text{при } v \uparrow \infty \\ 0 \downarrow & \text{при } v \downarrow 0 \end{cases} \quad V^w(\alpha)_i \begin{cases} 1 \uparrow & \text{при } w \uparrow \infty \\ 0 \downarrow & \text{при } w \downarrow 1 \end{cases} \quad (6.35)$$

$$V^{vw}(\alpha)_i \begin{cases} 1 \uparrow & \text{при } v \uparrow \infty \wedge w \uparrow \infty \\ 0 \downarrow & \text{при } v \downarrow 0 \vee w \downarrow 1. \end{cases}$$

Эти определенные для каждого варианта  $E_i$  доверительные факторы можно использовать в качестве индивидуальных параметров в НЛ-критерии (4.5), т. е. обозначая для упрощения записи любой из доверительных факторов (эмпирический, прогностический, эмпирико-прогностический) через  $u_i$ , получим посредством соотношений

$$\mu_{ir} = u_i \sum_{j=1}^n h_j e_{ij} + (1 - u_i) \min_j e_{ij}, \quad (6.36)$$

$$\mu_{ir} \longrightarrow \max_i!$$

уточненный вариант НЛ-критерия.

Характерными для указанных доверительных факторов являются «наиболее неблагоприятные» средние значения полезности  $\bar{M}_v(\alpha)$ ,  $\bar{M}^w(\alpha)$  и  $\bar{M}^{vw}(\alpha)$ . При наличии нескольких вариантов решения  $E_i$  и, естественно, нескольких величин  $e_{ij}$ , зависящих от внешних состояний  $F_j$ , эти средние значения определяются индивидуально по следующим формулам:  $\bar{M}_v(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n \bar{h}_{v,j,i}(\alpha) e_{ij}$ ,

$\bar{M}^w(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n \bar{h}_{j,i}^w(\alpha) e_{ij}$  и  $\bar{M}^{vw}(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n \bar{h}_{v,j,i}^{vw}(\alpha) e_{ij}$ . Ниже будет

описан общий принцип представления этих формул, для чего средние значения, соответствующие всем трем типам доверительных факторов, обозначаются просто  $\tilde{M}(\alpha)_i$ , а границы, вычисленные (в зависимости от вероятности ошибки  $\alpha$ ) для отдельных вероятностей, обозначаются  $\check{q}_{ij}(\alpha)$  и  $\hat{q}_{ij}(\alpha)$ . Тогда для определения  $\tilde{M}(\alpha)_i$  необходимо найти вероятности  $q_{ij}$  в соответствии с условиями

$$\tilde{M}(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n e_{ij} q_{ij} \longrightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n q_{ij} = 1, \quad (6.37)$$

$$\check{q}_{ij}(\alpha) \leq q_{ij} \leq \hat{q}_{ij}(\alpha).$$

Такая постановка задачи позволяет распространить ее решение и на случай непрерывного распределения бесконечного множества возможных значений влияющих параметров  $x \in F$ , причем для каждого  $x \in F$  и варианта решения  $E_i$  реализуется свое значение полезности  $e(x, i)$ . Границы для частот в их зависимости от вероятности ошибки  $\alpha$  могут теперь быть представлены в виде функций распределения  $\check{Q}_i(\alpha, x)$  и  $\hat{Q}_i(\alpha, x)$  вместо  $\check{q}_{ij}(\alpha)$  и  $\hat{q}_{ij}(\alpha)$  соответственно. Для определения  $\tilde{M}(\alpha)_i$  необходимо найти функцию распределения  $Q_i(x)$  согласно условиям

$$\tilde{M}(\alpha)_i = \int_{-\infty}^{+\infty} e(x, i) dQ_i(x) \longrightarrow \min, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dQ_i(x) = 1,$$

$$\check{Q}_i(\alpha, x) \leq Q_i(x) \leq \hat{Q}_i(\alpha, x).$$

Для обобщения понятия о самом неблагоприятном среднем значении полезности по всем трем типам доверительных факторов аналогично формулам (6.18), (6.26) и (6.32) обозначим эту величину через  $\tilde{M}(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n h_{ji}(\alpha) e_{ij}$ , после чего в результате несложных преобразований, используя выражение (6.36), получаем простое равенство:

$$\mu_{ir} = \tilde{M}(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n h_{ji}(\alpha) e_{ij}. \quad (6.38)$$

Предыдущие рассуждения можно распространить на общий случай задачи принятия решения при наличии нескольких параметров  $l=1, \dots, L$ . Если, отбрасывая в данном случае индекс  $i$  для различных вариантов решения  $E_i$ , обозначить через  $\check{q}_{jl}(\alpha)$  и  $\hat{q}_{jl}(\alpha)$  границы для вероятностей состояний, соответствующих параметру  $l$ ,  $1 \leq l \leq L$ , то можно принять

$$\check{q}_j(\alpha) := \prod_{l=1}^L \check{q}_{jl}(\alpha) \quad \text{и} \quad \hat{q}_j(\alpha) := \prod_{l=1}^L \hat{q}_{jl}(\alpha). \quad (6.39)$$

Теперь, когда определены эти новые границы, все еще зависящие от некоторых комплексных состояний, дальнейший способ действий остается тем же, что и в случае одного параметра.

Если вместо нижней и верхней границ функций распределения вероятностей  $\tilde{q}_{jl}(\alpha)$  и  $\hat{q}_{jl}(\alpha)$  известны соответствующие границы  $\tilde{h}_{jl}(\alpha)$  и  $\hat{h}_{jl}(\alpha)$ , то, аналогично (6.39), можно получить нижние и верхние границы

$$\check{h}_j(\alpha) := \prod_{l=1}^L \check{h}_{jl}(\alpha) \quad \text{и} \quad \hat{h}_j(\alpha) := \prod_{l=1}^L \hat{h}_{jl}(\alpha).$$

Учет зависимости доверительных факторов от варианта решения  $E_i$ ,  $i=1, \dots, m$  при определенных обстоятельствах требует довольно больших вычислительных затрат. С целью упрощения обозначим через  $V_i$  любой из трех типов доверительных факторов. Тогда, если диапазон разброса его значений

$$\min_i V_i \leq V_i \leq \max_i V_i$$

для всех  $m$  вариантов решения сравнительно невелик, то вполне обоснованно можно использовать среднее значение доверительного фактора

$$\bar{V} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i.$$

Эта величина теперь полностью соответствует доверительному фактору НЛ-критерия (4.6), разд. 4.2, но теперь она содержательно мотивирована, а в количественном отношении точно определена.

## 6.5. Принятие решения при наличии риска

Допущение пусть даже малой вероятности  $\alpha$  принятия ошибочного решения не исключает возможности риска даже с учетом вычисления (введенных выше) доверительных факторов. Полное устранение риска при принятии решений практически даже и не требуется; мало того, определенная степень риска вводится сознательно, так как принятие решения без риска, например, с предельно пессимистической позиции, как правило, невыгодно. Однако при этом разумный риск следует отличать от риска азартного игрока. Любой риск, во-первых, должен учитываться по возможности полно, описываться количественными характеристиками и ограничиваться, а во-вторых, ни в коем случае не превышать уровень, при котором результат достигается с достаточной надежностью. Приводимые ниже рассужде-



ния ознакомят читателя с возможностью принятия эффективно-го решения при наличии определенного риска.

В качестве опорного для оценки риска примем выражение (3.3) для совокупности вариантов решения по минимаксному критерию, соответствующее позиции крайней осторожности. В случае выбора вместо оптимального по данному критерию какого-либо другого варианта  $E_i$  степень неоптимальности можно вычислить в виде так называемого дефекта варианта решения  $E_i$  относительно опорного значения оценочной функции по ММ-критерию:

$$\varepsilon_{i \text{ возм}} = Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij}. \quad (6.40)$$

Максимальную разность дефектов при рассмотрении всех возможных вариантов решения  $E_i, i=1, \dots, m$ , можно охарактеризовать как возможный риск:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{возм}} &= \max_i (Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij}) - \min_i (Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij}) = \\ &= Z_{\text{ММ}} - \min_i \min_j e_{ij}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Таким образом, возможный риск  $\varepsilon_{\text{возм}}$  независимо от информации о параметрах, имеющейся по результатам выборки, а также от числа реализаций процесса представляет собой максимально возможную величину нереализуемой полезности решения. В случае малых объема  $v$  выборки и числа реализаций  $w$  процесса принятия решения безопаснее придерживаться ММ-критерия, тогда как при достаточно больших значениях  $v$  и  $w$  целесообразно ориентироваться на ВЛ-критерий. Как известно, оба они обобщаются НЛ-критерием (4.6), согласно усовершенствованному варианту которого (6.36) оптимальным считается решение  $E_i$ , для которого выражение

$$e_{ir} = u_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + (1 - u_i) \min_j e_{ij} \quad (6.42)$$

дает максимальный результат. Здесь и в дальнейшем изложении материала величины  $h_j, j=1, \dots, n$  представляют собой известные, в меру имеющейся в наличии информации, вероятности реализации внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$  либо оценки этих вероятностей, полученные на основании выборки по результатам каких-либо экспериментов, либо, по крайней мере, относительные частоты их распределения, определенные на основании априорной информации. В качестве  $u_i$  целесообразно использовать эмпирико-прогностический доверительный фактор  $V_v^w(\alpha)$ , величина которого автоматически изменяется в грани-

цах, установленных ранее на основании его свойств, см. (6.35):

$$V_v^w(\alpha)_i \underset{\substack{v \rightarrow \infty \\ w \rightarrow \infty}}{\uparrow} 1, \text{ а также } V_v^w(\alpha) \underset{v \rightarrow 0}{\downarrow} 0 \text{ и } V_v^w(\alpha) \underset{w \rightarrow 1}{\downarrow} 0.$$

Отсюда видно, что при большом объеме выборки  $v$  и одновременно большом числе реализаций  $w$  улучшенный НЛ-критерий (6.36) приближается к нейтральному ВЛ-критерию, а в случаях малого объема  $v$  выборки и (или) числа реализаций  $w$  определяющим становится ММ-критерий. При этом с учетом (6.36) и (6.42) выражение (6.38) может быть записано в виде

$$e_{ir} = \tilde{M}^w_v(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n \tilde{h}^w_{v,j,i}(\alpha) e_{ij}. \quad (6.43)$$

Остановимся на определении границ применимости НЛ-критерия. В самом деле, при наличии информации о вероятностном распределении внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$ , даже, например, при малом числе реализаций  $w$  [что, кстати, будет отражено в малости величины доверительного фактора, согласно (6.33)], имеет смысл выйти за рамки строгого следования минимаксному критерию, если принимающий решение готов в такой ситуации пойти на некоторый риск, определяемый величиной  $\epsilon_{\text{доп}}$ . Для некоторых внешних условий, имеющих большую вероятность реализации, могут получиться варианты решения, которые дают заметный выигрыш по сравнению с оптимальным вариантом по ММ-критерию. С целью оценки конкурентоспособности таких решений для каждого варианта  $E_i$  введем специальную величину, равную сумме минимального результата  $\min_j e_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , и эффекта риска:

$$\min_j e_{ij} + \epsilon_i. \quad (6.44)$$

Величина  $\epsilon_i$  по своему смыслу должна отвечать ограничению

$$\epsilon_i = \min(\epsilon_i \text{ возм}, \epsilon_{\text{доп}}). \quad (6.45)$$

Тем самым гарантируется непревышение величиной  $\epsilon_i$  значения дефекта  $i$ -го варианта решения по отношению к оптимуму, полученному по минимаксному критерию [см. (6.40)], а также величины допустимого риска  $\epsilon_{\text{доп}}$ . Максимальный риск при рассмотрении всех вариантов решения  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , согласно (6.40) равен

$$\epsilon = \max_i \epsilon_i = \max_i \min(\epsilon_i \text{ возм}, \epsilon_{\text{доп}}). \quad (6.46)$$

В отличие от выражения (6.42) для НЛ-критерия, будем теперь

исходить из следующей оценки результата:

$$\mu_i := V_v^w(\alpha)_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + (1 - V_v^w(\alpha)_i) \min_j (e_{ij} + \varepsilon_i). \quad (6.47)$$

Обозначим через  $E^*(\varepsilon)$  множество всех вариантов решения, обеспечивающих максимум величины  $\mu_i$ :

$$E^*(\varepsilon) := \{E_i / \mu_i = \max_i \mu_i\}, \quad \max_i \mu_i = \mu^*. \quad (6.48)$$

Для разъяснения сути критерия, определяемого выражениями (6.47) и (6.48), рассмотрим два крайних случая. Если  $\varepsilon_{\text{доп}} = 0$ , то, согласно (6.45), и  $\varepsilon_i = 0$ , а тогда из (6.47) получаем вновь выражение для улучшенного НЛ-критерия (6.36):

$$\mu_i = u_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + (1 - u_i) \min_j e_{ij}, \quad (6.47a)$$

где  $u_i = V_v^w(\alpha)_i$ .

Если  $\varepsilon_{\text{доп}} \geq \varepsilon$ , то, согласно (6.45),  $\varepsilon_i = \varepsilon_i \text{ возм}$ , а выражение (6.47) с учетом (6.40) фактически преобразуется в нейтральный критерий Байеса — Лапласа:

$$\mu_i = u_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + (1 - u_i) Z_{\text{мм}},$$

причем весовой коэффициент  $u_i$  равен доверительному фактору  $u_i = V_v^w(\alpha)_i$ .

Продолжая наши рассуждения, рассмотрим случай, когда  $u_i = V_v^w(\alpha)_i = 0$ . Эта величина равна нулю в случае, когда  $v = 0$ , т. е. нет никакой информации о распределении вероятностей реализации внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$ , или при  $w = 1$ , т. е. когда решение принимается впервые. Тогда выражение (6.47) преобразуется к виду

$$\mu_i | u_i = 0 = \min_j (e_{ij} + \varepsilon_i) \longrightarrow \max_i \quad (6.49)$$

Приращение результата  $e_{ij}$  до величины  $e_{ij} + \varepsilon_i$ , которая, согласно (6.45) и (6.40), может достигать  $Z_{\text{мм}}$ , позволяет в соответствии с (6.48) включить в рассмотрение несколько дополнительных вариантов решения. Дальнейшим рациональным шагом будет применение ВЛ-критерия для этих вариантов:

$$\mu^{**} := \max_{\{i \in E_i \in E^*(\varepsilon)\}} \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j. \quad (6.50)$$

Тем самым из множества  $E^*(\varepsilon)$  вариантов решения, результаты которых максимизируются выражением (6.49), предпочтение

будет отдано вариантам, имеющим максимальный средний результат, а к ним в первую очередь относятся такие варианты  $E_i$ , в которых внешние состояния  $F_j$ , обеспечивающие высокие значения результата  $e_{ij}$ , характеризуются большими вероятностями реализации. Приведенные здесь рассуждения для случая  $u_i = V_v^w(\alpha)_i$  справедливы и для значений  $u_i$ , близких к нулю. Если же значение  $u_i = V_v^w(\alpha)_i$  близко к единице, то критерий (6.47) и сам по себе приближается к критерию Байеса — Лапласа:

$$\sum_j e_{ij} h_j \rightarrow \max_i$$

### 6.6. Опорные величины для оценки риска

Теперь необходимо более глубоко определить понятие риска, которое обычно интерпретируется как возможность получения нежелательного результата. В рассматриваемой нами ситуации принятия решений будем считать риском реализацию случая, когда вариант решения  $E_i$  при внешнем состоянии  $F_j$  дает результат меньше ожидаемого. Эту ожидаемую величину примем в качестве опорной для оценки риска, причем для большей ясности необходимо разделять опорные величины на *зависящие* и *не зависящие* от внешних факторов.

В качестве не зависящей от внешних факторов опорной величины  $e_z$  может фигурировать любая вещественная величина, однако согласно смыслу ее определения она может находиться только в диапазоне

$$\min_i \min_j e_{ij} \leq e_z \leq \max_i \max_j e_{ij}. \quad (6.51)$$

Для конкретного варианта  $E_i$  величина

$$\varepsilon_i := e_z - \min_j e_{ij} = \max_j (e_z - e_{ij}) \quad (6.52)$$

называется возможным дефектом выбора варианта решения  $E_i$ . Так как отрицательные значения  $\varepsilon_i$  согласно (6.52) не являются дефектом, рассмотрим, с учетом обычного обозначения положительной части  $x^+$  вещественного числа  $x$  через  $x^+ := \max(x, 0)$ , величину

$$\varepsilon_i^+ := \max(\varepsilon_i, 0) = (e_z - \min_j e_{ij})^+ \quad (6.53)$$

и назовем имеющим дефект или свободным от дефекта вариант принятия решения  $E_i$ , когда  $\varepsilon_i^+ > 0$  или, соответственно,  $\varepsilon_i^+ = 0$ . Тогда при  $e_z > \max_i \max_j e_{ij}$  любой вариант принятия решения

будет иметь дефект, а при  $e_z = \min_i \min_j e_{ij}$  все варианты будут свободными от дефекта.

Было бы целесообразным определять опорные величины для оценки риска через значения известных критериев принятия решения. Так, например, обозначим

$$e_i^{MM} = Z_{MM} - \min_j e_{ij} \quad (6.54)$$

и, соответственно,  $(e_i^{MM})^+$  как возможный дефект решения  $E_i$  относительно достижимого значения оценочной функции  $Z_{MM}$  по минимаксному критерию.

По отношению к независимой от внешних состояний опорной величине  $e_z$  можно ввести следующее определение: из двух вариантов решения  $E_i$  и  $E_l$  будем называть вариант  $E_i$  не лучшим по сравнению с  $E_l$  (записав это в виде соотношения  $E_i \leq E_l$ ), если определенные согласно (6.52) оценки риска  $e_i$  и  $e_l$  удовлетворяют неравенству  $e_i \geq e_l$ . Раскрывая данное неравенство  $e_i = e_z - \min_j e_{ij} \geq e_z - \min_j e_{lj}$  и сокращая в нем подобные члены, получим  $\min_j e_{ij} \leq \min_j e_{lj}$ , что говорит о независимости данного выражения от  $e_z$ . Характер соотношения вариантов принятия решения для всех независимых от внешних факторов уровней отсчета  $e_z$  будет тот же самый, и, сохраняя суть соотношения, его можно просто записать в виде  $E_i \leq E_l$ .

В общей формулировке опорную величину  $e_z$ , зависящую от внешних факторов, можно представить в виде функции от всех  $m \cdot n$  значений результатов решения  $e_{ij}$ :

$$e_z = \varphi(e_{ij}), \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m, \\ j=1, \dots, n. \end{matrix} \quad (6.55)$$

(Данное выражение включает в себя и тот случай, когда  $\varphi$  вообще не зависит от  $e_{ij}$ , т. е. является константой.) Тогда дефект, возможный при выборе варианта решения  $E_i$ , согласно (6.52), определяется выражением

$$e_i = \varphi(e_{ij}) - \min_j e_{ij} = \max_j (\varphi(e_{ij}) - e_{ij}). \quad (6.56)$$

Выбор оптимального варианта  $E_i^*$  дает минимальный дефект  $e^*$ :

$$e^* = e_{i^*} = \min_i e_i. \quad (6.57)$$

Таким образом, разность между дефектом  $e_i$  варианта решения  $E_i$  и минимальным дефектом  $e^*$  принимает вид

$$\Delta e_i = e_i - \min_i e_i = (\varphi(e_{ij}) - \min_j e_{ij}) - \min_i [\varphi(e_{ij}) - \min_j e_{ij}]. \quad (6.58)$$

Полученную разность дефектов можно рассматривать как относительный риск при выборе соответствующего варианта решения  $E_i$ .

В случае, когда опорной величиной является оценочная функция  $Z_{MM}$ , соответствующая ММ-критерию, минимальный дефект  $\epsilon^* = \min_i \epsilon_i = \min_i (Z_{MM} - \min_j e_{ij}) = Z_{MM} - \max_i \min_j e_{ij} = 0$ , так что в этом случае  $\Delta \epsilon_i = \epsilon_i = Z_{MM} - \min_j e_{ij}$ .

Опорные величины могут быть определены для каждого из  $n$  внешних состояний  $F_1, \dots, F_n$  отдельно с помощью функции  $\Psi$  от  $m$  переменных:

$$e_{zj} := \Psi(e_{1j}, \dots, e_{ij}, \dots, e_{mj}). \quad (6.59)$$

В этом случае в соответствии с (6.51) значения  $e_{zj}$  имеют смысл только в диапазоне

$$\min_i e_{ij} \leq e_{zj} \leq \max_i e_{ij}. \quad (6.60)$$

Величину

$$\epsilon_i := \max_j (e_{zj} - e_{ij}) \quad (6.61)$$

будем называть возможным дефектом выбранного варианта решения  $E_i$  или оценкой риска, сопутствующего такому решению; при этом, в соответствии с (6.53), заслуживают внимания только положительные значения:

$$\epsilon^+_i := [\max_j (e_{zj} - e_{ij})]^+. \quad (6.62)$$

Ограничение значений опорной величины  $e_{zj}$  диапазоном (6.60) мотивируется тем, что при  $e_{zj} > \max_i e_{ij}$  любой вариант решения имеет дефект, а при  $e_{zj} \leq \min_j e_{ij}$  все варианты бездефектны.

Примерами зависимых от внешних факторов опорных величин являются граничные значения диапазона (6.60):

$$e_{zj} := \max_i e_{ij} \quad (6.63)$$

и

$$e_{zj} := \min_i e_{ij}, \quad (6.64)$$

а также среднее значение

$$e_{zj} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m e_{ij}. \quad (6.65)$$

Оптимальный выбор варианта решения  $E_i^*$  дает минимальный

дефект, который для величин, не зависящих от внешних факторов, аналогично (6.57) и (6.61) равен

$$\varepsilon^* = \varepsilon_i^* = \min_i \varepsilon_i, \quad (6.66)$$

а разность между возможным и минимальным дефектами для варианта решения  $E_i$  составит, аналогично (6.58):

$$\Delta \varepsilon_i = \varepsilon_i - \min_i \varepsilon_i = \max_j [e_{zj} - e_{ij}] - \min_i \{ \max_j [e_{zj} - e_{ij}] \}. \quad (6.67)$$

Эту величину, в свою очередь, можно рассматривать как относительный риск при принятии варианта решения  $E_i$ .

Более наглядная интерпретация свойств зависимой от внешних факторов опорной величины получается в случае использования S-критерия (3.7) с оценочной функцией

$$Z_s = \min_i [\max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})]. \quad (6.68)$$

Действительно, если принять в качестве опорной величины, зависящей от внешних состояний,  $e_{zj} := \max_i e_{ij}$  [см. (6.63)], то, согласно (6.52), риск, сопутствующий решению  $E_i$ , определяется выражением  $\varepsilon_i = \max_j (\min_i e_{ij} - e_{ij})$ , а оптимальным, согласно (6.68), будет вариант решения  $E_i^*$  с оценочной функцией

$$Z_s = \min_i \varepsilon_i = : \varepsilon^*,$$

т. е. вариант с минимальным риском.

## 6.7. Пример оценки значимости параметра для некоторой простой функции при различных его вероятностных распределениях

В примере, предлагаемом ниже, будут рассчитаны значимость, энтропия и коэффициенты влияния, понятия о которых были даны в разд. 6.2 и 6.3. Дальнейшее применение они получат в разд. 9.5. Расчет величин доверительных факторов из разд. 6.4 будет рассмотрен в разд. 7.2.

Вопросы принятия решения при наличии риска (разд. 6.5) и выбора опорной величины для оценки риска (разд. 6.6) не нуждаются здесь в дальнейших пояснениях. Для этого в разд. 7.2 будут даны методы их расчета.

В качестве примера рассмотрим простую функцию

$$e(y, x) = y^2/x_1 + 2x_2. \quad (6.69)$$

Здесь  $y$  — зависимая переменная возможных вариантов решения, а  $x_1$  и  $x_2$  — независимые переменные, описывающие неизвестные влияния внешних состояний. В табл. 6.5 приведены

Таблица 6.5. Дискретные значения переменных  
[уравнение (6.69)]

Зависимая переменная $y$	$y_i \in [1, 2, 3]$
Независимые переменные $x$	$x_1$ : распределена равномерно $G(0,1; 0,9)$ $x_{1j} \in [0,1; \dots; 0,9]$ $x_2$ : распределена нормально $N(10; 0,44)$ $x_{2j} \in [8, \dots, 12]$

дискретные значения переменных, выбранные для данного примера. Границы значений параметров  $y$  и  $x_1$  определяются условиями задачи, а для параметра  $x_2$  они подчиняются правилу  $3\sigma$ .

Сначала выполним расчет коэффициентов влияния независимых параметров, значения которых приведены в табл. 6.5, используя формулы (6.5), (6.6) и (6.7). Результаты вычислений сведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6. Релевантности и коэффициенты влияния независимых параметров из выражения (6.69), распределенных согласно данным табл. 6.5

$y_i$	$R_{ii}^a$ (6.5)		$R_{ii}^b$ (6.6)		$R_i$ (6.7)	
	$R_{i1}^a$	$R_{i2}^a$	$R_{i1}^b$	$R_{i2}^b$	$R_1$	$R_2$
$y_1=1$	0,404	0,364	0,526	0,474	0,909	0,474
$y_2=2$	1,270	0,286	0,876	0,184		
$y_3=3$	2,105	0,210	0,909	0,091		

Из таблицы видно, что максимальный коэффициент влияния  $R_1$  для параметра  $x_1$  почти вдвое выше, чем для параметра  $x_2$ . Отсюда лицо, принимающее решение, может извлечь указание о необходимой в данном случае дополнительной информации относительно условий задачи либо имеющихся результатов. Если, например, получение дополнительной информации для снижения уровня неопределенности в условиях задачи связано



**Таблица 6.7. Значимость  $B_1$   
параметра  $x_1$  функции (6.69)  
в зависимости от числа  
интервалов дискретизации  $n_1$**

Равномерное распределение (0,1; 0,9) Максимальный коэффициент влияния $R_1=0,909$			
$n_1$	$\Delta_1$	$H_1$	$B_1$
2	0,40	0,693	0,630
3	0,27	1,099	0,999
4	0,20	1,386	1,260
5	0,16	1,609	1,463
6	0,13	1,792	1,629
10	0,08	2,303	2,093
20	0,04	2,996	2,723
50	0,02	3,912	3,556

**Таблица 6.8. Значимость  $B_2$   
параметра  $x_2$  функции (6.69)  
в зависимости от числа интервалов  
дискретизации  $n_2$**

Нормальное распределение (10; 0,44) Максимальный коэффициент влияния $R_2=0,474$			
$n_2$	$\Delta_2$	$H_2$	$B_2$
2	2,00	0,320	0,152
3	1,33	0,725	0,344
4	1,00	1,014	0,480
5	0,80	1,237	0,586
6	0,67	1,419	0,673
10	0,40	1,930	0,915
20	0,20	2,623	1,243
50	0,08	3,539	1,678

с неоправданными затратами на дальнейшие измерения или наблюдения, то для решения задачи целесообразно ограничиться наличной информацией и сосредоточить внимание на параметрах с большими коэффициентами влияния.

Для вычисления значимости  $B_i$  необходимо определить еще энтропию заданных параметров. Из выражения (6.13) в разд. 6.3 в качестве приближения для вычисления энтропии равномерно распределенного параметра получим выражение

$$\tilde{H}_{\text{равн}}(\Delta_i) = \ln(x_i' - \tilde{x}_i)/\Delta_i, \quad (6.70)$$

где  $\hat{x}_l$  — верхнее граничное значение параметра  $x_l$ ,  $\check{x}_l$  — нижнее граничное значение параметра  $x_l$ ,  $\Delta_l$  — шаг дискретизации параметра  $x_l$ , а для параметра, распределенного по нормальному закону, — выражение

$$\mathcal{H}_{\text{норм}}(\Delta_l) = 1/2 \ln 2\pi e (\sigma^2/\Delta_l^2), \quad (6.71)$$

где  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение нормального закона распределения.

Параметры распределения  $\check{x}_l$ ,  $\hat{x}_l$  и  $\sigma$  приведены в табл. 6.5. Теперь, используя выражения (6.70) и (6.71), произведем расчет энтропий обоих независимых параметров  $x_1$  и  $x_2$  в зависимости от шага дискретизации. Результаты вычислений приведены в табл. 6.7 и 6.8, где, кроме того, даны величины значимостей  $B_1$  и  $B_2$  параметров, определенные по формуле (6.8) из разд. 6.2.

На больших интервалах дискретизации соотношение значимостей  $B_1$  и  $B_2$  параметров  $x_1$  и  $x_2$  за счет их энтропии лучше для параметра  $x_1$ , чем на малых интервалах дискретизации. С ростом числа интервалов дискретизации отношение  $B_1/B_2$  стремится к величине  $R_1/R_2$ .

В разд. 9.5 показано, как необходимо выполнять объективный выбор величин значимости и числа интервалов дискретизации заданных независимых (неизвестных) параметров с учетом взаимосвязи этих величин.

## ГИБКИЙ КРИТЕРИЙ ВЫБОРА РЕШЕНИЯ

### 7.1. Свойства

Проведенные в гл. 6 рассуждения составляют основу для такого критерия выбора решения, который гибко сочетается с качественными характеристиками исходной информации и числом предстоящих реализаций решения, что характеризуется, соответственно, эмпирическим и прогностическим доверительными факторами. Кроме того, проводится учет возможного риска, ограниченного его допустимой величиной. С помощью пяти требующих обязательного выполнения условий  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$ , формулировки которых будут даны ниже, опишем множество  $E_0$  оптимальных согласно данному гибкому критерию решений  $E_i \in E_0$  в виде

$$E_0 = \{E_i | G_1 \wedge (G_2 \vee G_3) \wedge G_4 \wedge G_5\}. \quad (7.1)$$

При этом условия формально характеризуются следующими соотношениями:

$$G_1: E_i \in E \quad (7.2)$$

$$G_2: V(\alpha)_i = V_{\text{доп}}; \quad V(\alpha)_i \text{ — доверительный фактор} \quad (7.3)$$

$$V_v^w(\alpha)_i \text{ или } V_v(\alpha)_i \text{ или } V^w(\alpha)_i,$$

$$V_{\text{доп}} \text{ — максимально допустимый доверительный фактор}$$

$$G_3: Z_{\text{мм}} = \min_i e_{ij} \leq \varepsilon_{\text{доп}} \quad (7.4)$$

$$G_4: Z_r = \mu^* = \max_i \{V(\alpha)_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + (1 - V(\alpha)_i) \times$$

$$\times (\min_j e_{ij} + \varepsilon_i)\}; \quad Z_r \text{ — гибкая оценочная функция} \quad (7.5)$$

$$G_5: \mu^{**} = \max_{i: E_i \in E^*(e)} \sum_j e_{ij} h_j. \quad (7.6)$$

Условие  $G_1$  говорит о том, что при выборе оптимального варианта решения рассмотрению подлежат все возможные варианты из множества  $E$ . Условия  $G_2$  и  $G_3$  определяют границы величины допустимого риска при использовании гибкого критерия  $G_4$ . При этом лицо, принимающее решение, может ограничить величину риска по собственному усмотрению путем выбора условия  $G_2$  или  $G_3$ ; в то время как условие  $G_2$  с ростом доверительного фактора  $V(\alpha)_i$  из сочетания минимаксного

критерия и критерия Байеса — Лапласа способствует выбору решения, все более близкого к решению по последнему из названных критериев, условие  $G_3$  непосредственно ограничивает отклонение возможного результата решения от результата, принятого по минимаксному критерию. При использовании гибкого критерия  $G_4$  величины  $\varepsilon_i$  ограничиваются в соответствии с условием (6.45) путем выбора допустимой величины риска  $\varepsilon_{\text{доп}}$  и, кроме того, дополнительным условием  $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{\text{доп}}$ , поэтому, согласно (6.40), всегда выполняется равенство  $\varepsilon_i = \min(\varepsilon_{\text{доп}}, \varepsilon_{\text{доп}i}) = : \varepsilon$ .

Оценочная функция  $Z_r$  гибкого критерия  $G_4$  существенно отличается от таковой НЛ-критерия [см. (4.4)], поскольку она содержит величину  $\varepsilon_i$ , определяющую возможный риск при принятии решения. Благодаря этому становятся конкурентоспособными и другие варианты решения, отличные от выбранных по ММ- и НЛ-критериям. Множество вариантов решения, максимизирующее оценочную функцию (7.5), аналогично (6.48) обозначим  $E^*(\varepsilon)$ . Согласно условию  $G_5$ , из полученного множества выбираются в качестве оптимальных только варианты решения, которые, кроме выполнения предыдущих условий, оптимальны в смысле ВЛ-критерия (3.4).

Ряд логических условий в выражении (7.1) определяет процедуру принятия решения, заключающуюся в первоначальной фиксации допустимых границ риска, а затем выполнении, в рамках заданных возможностей, поиска оптимального варианта решения. Такой подход наиболее приемлем и при разработке алгоритмов для процедуры принятия решения с помощью ЭВМ. В прикладных задачах, однако, нередко вначале путем варьирования величины риска  $\varepsilon_i$  выполняется оценка возможного эффекта от решений, соответствующих оценочным функциям  $G_4$  и  $G_5$  для заданных значений  $\varepsilon_i$ , а затем в зависимости от полученных результатов устанавливаются окончательные границы риска согласно  $G_2$  и  $G_3$ . В этом случае гибкий критерий преобразуется в ряд логических условий  $G_1 \rightarrow G_4 \rightarrow G_5 \rightarrow (G_2 \vee G_3)$ . При этом необходимо исследовать, насколько учет допустимого риска снижает достижимый результат.

Отметим, что использование доверительных факторов  $V(\alpha)$  из разд. 6.4, например  $V(\alpha) = V_v^w(\alpha)_i$ , согласно выражениям (6.36), (6.39), (6.42) и (6.43) приводит к изменению вида гибкой оценочной функции  $G_4$  (7.5):

$$Z_r = \mu^* = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j,i}(\alpha) e_{ij} + (1 - V_i) \varepsilon_i \right\}. \quad (7.7)$$

В основе применения описанного выше гибкого критерия выбора решения лежит методический подход к выбору точки

отсчета для величины риска, которой, согласно разд. 6.6, должен быть результат выбора по минимаксному критерию, не зависящий от значений внешних факторов в задаче. Для расширения области применения критерия на случай опорных величин риска, зависящих от значений внешних факторов,  $e_{zj}$ ,  $j=1, \dots, n$ , требуется преобразование оценочных функций  $G_3$  и  $G_4$  к следующему виду:

$$G'_3: \max_j (e_{zj} - e_{ij}) - \min_i \max_j (e_{zj} - e_{ij}) \leq \varepsilon_{\text{доп } i}, \quad (7.8)$$

$$i=1, \dots, m$$

$$G'_4: Z'_r = \min_i \left[ u_i \sum_{j=1}^n (e_{zj} - e_{ij}) h_j + \right. \\ \left. + (1 - u_i) \max_j (e_{zj} - e_{ij}) - \varepsilon_i \right]. \quad (7.9)$$

Выражения (7.8) и (7.9) представляют собой не что иное, как общий случай формулировки гибкого критерия. В этом легко убедиться, заменив в данных выражениях зависящие от внешних факторов опорные оценки риска  $e_{zj}$ ,  $j=1, \dots, n$ , на результат оценочной функции по минимаксному критерию. Тогда для  $G'_3$  получаем

$$\begin{aligned} & \max_j (Z_{\text{ММ}} - e_{ij}) - \min_i \max_j (Z_{\text{ММ}} - e_{ij}) = \\ & = Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij} - \min_i (Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij}) = \\ & = Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij} - (Z_{\text{ММ}} - \max_i \min_j e_{ij}) \leq \varepsilon_{\text{доп } i} \end{aligned}$$

и, учитывая, что  $Z_{\text{ММ}} = \max_i \min_j e_{ij}$ , непосредственно  $G_3$ .

Аналогично для оценочной функции  $G'_4$ , подставляя  $e_{zj} = Z_{\text{ММ}}$ , имеем

$$\begin{aligned} Z'_r &= \min_i \left\{ u_i \sum_{j=1}^n (Z_{\text{ММ}} - e_{ij}) h_j + (1 - u_i) (Z_{\text{ММ}} - \min_j e_{ij} - \varepsilon_i) \right\} = \\ &= \min_i \left\{ u_i \sum_{j=1}^n Z_{\text{ММ}} h_j + (1 - u_i) Z_{\text{ММ}} - \left[ u_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - u_i) (\min_j e_{ij} + \varepsilon_i) \right] \right\} = \min_i \left\{ Z_{\text{ММ}} - \left[ u_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - u_i) (\min_j e_{ij} + \varepsilon_i) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Минимизация (относительно индекса  $i$ ) выражения, заключенного в фигурные скобки, адекватна максимизации выражения

в квадратных скобках, что соответствует условию  $G_4$ , а следовательно, и выражению для  $Z_r$ .

Аналогично ранее обсуждавшимся критериям рассмотрим для наглядности процедуру выбора решения с использованием гибкого критерия на примере с двумя внешними состояниями  $F_1$  и  $F_2$ . При этом используем среднее значение доверительного фактора, обозначив его через  $V$ , и, как и ранее, произведем замену переменных  $e(y, x_1) = u$ ,  $e(y, x_2) = v$ . Тогда линии уровня

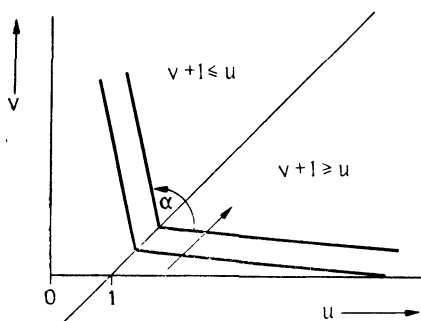


Рис. 7.1. Область предпочтения для случая гибкого критерия.

на плоскости  $uv$  для оценочной функции  $Z_r$   $G_4$  [см. (7.5)] будут описываться уравнением

$$V(uh_1 + vh_2) + (1 - V) \min(u + \varepsilon_1, v + \varepsilon_2) = k. \quad (7.10)$$

Обсудим оба случая ограничения величины риска условиями  $G_2$  и  $G_3$ , а для графически наглядного представления положим  $h_1 = 1/3$ ,  $h_2 = 2/3$ .

Если величина риска в соответствии с условием  $G_2$  ограничивается максимально допустимым значением доверительного фактора  $V_{\text{доп}}$ , то величиной  $\varepsilon_i$ , учитывающей в оценочной функции  $G_4$  возможность риска, можно пренебречь, т. е. принять  $\varepsilon_i = 0$ . Выбрав значение  $V_{\text{доп}} = 1/4$ , выражение (7.10) для линий уровней приведем к виду

$$u + 2v + 9 \min(u, v) = c.$$

Линии уровня, приведенные на рис. 7.1, полностью соответствуют аналогичным линиям для НЛ-критерия (сравните с рис. 5.8). Линии уровня представляют собой две системы параллельных прямых, встречающихся для фиксированного уровня  $c$  на направляющей прямой  $u = v$ . При  $v \leq u$  линии уровня описываются уравнением  $u + 11v = c$ , а при  $v \geq u$  — уравнением  $10u + 2v = c$ . Величина угла  $\alpha$  между этими прямыми линиями зависит от значения доверительного фактора  $V$ ; как и для НЛ-критерия, при  $V = 0$  он соответствует семейству линий уровня минимакс-

ного критерия и равен  $\alpha = \pi/2$ , а при  $V=1$  соответствует семейству линий уровня BL-критерия, т. е.  $\alpha = \pi$ .

Теперь рассмотрим влияние ограничения  $G_3$  возможного риска  $\epsilon_i$  и для наглядности примем  $\epsilon_1=1$ ,  $\epsilon_2=2$ . Отсюда, сначала в общем виде, согласно выражению (7.5), линии уровня описываются выражением

$$V(uh_1 + vh_2) + (1 - V)\min(u + 1, v + 2) = k,$$

а если, как и выше, выбрать  $V=1/4$ ,  $h_1=1/3$  и  $h_2=2/3$ , то получим

$$u + 2v + 9\min(u, v + 1) = c^*.$$

И в этом случае линии уровня образуют два семейства параллельных прямых, которые при одинаковом значении уровня  $c^*$  имеют общую точку на направляющей прямой, описываемой уравнением  $v = u - 1$  (рис. 7.2). Уравнения прямых одинакового уровня  $c'$ , как в предыдущем случае, определяются в

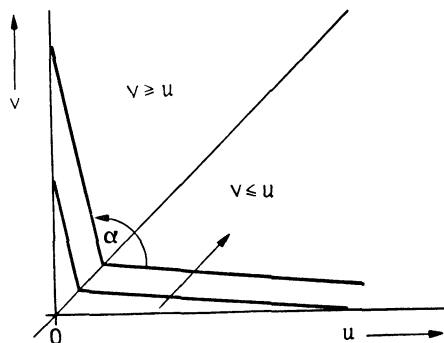


Рис. 7.2. Графический выбор варианта решения согласно гибкому критерию с учетом риска.

виде  $u + 11v = c'$  и  $10u + 2v = c'$  и, таким образом, угол  $\alpha$  между указанными прямыми остается без изменения (см. разд. 5.3.1).

Ход предыдущих рассуждений показывает, что гибкий критерий позволяет согласовать рассматриваемую задачу выбора решения с конкретными условиями. При малой статистической выборке состояний исходных данных, а также небольшой статистике реализаций решения гибкий критерий действует практически аналогично минимаксному; с возрастанием объема статистической выборки сочетаний внешних факторов и статистики ранее осуществленных решений гибкий критерий по своим результатам все более и более приближается к BL-критерию. Выбранное решение будет тем консервативнее, чем меньшим объемом априорной информации располагает лицо, принимающее решение, и чем меньше число ранее известных

случаев решения рассматриваемой задачи. Эти свойства, присущие гибкому критерию, справедливы для любой его версии с использованием доверительных факторов, рассмотренных в разд. 6.4. Гибкий критерий целесообразно применять, имея некоторый опыт и математическую подготовку в вопросах принятия решения; он требует только наличия данных, собранных в процессе постановки и попыток решения задачи, затраты на которые должны быть меньше величины возможного выигрыша.

## 7.2. Применение

Выбор оптимального варианта решения с использованием представленного в разд. 7.1 гибкого критерия удобно проиллюстрировать на примере задачи управления каким-либо процессом. С целью упрощения хода рассуждений рассмотрим четыре варианта решения  $E_1, E_2, E_3$  и  $E_4$ , из которых необходимо выбрать оптимальный.

Таблица 7.1. Матрица значений оценочной функции для задачи управления технологическим процессом

$K_1$	2,975			2,985		
$K_2$	2,98	3,00	3,02	2,98	3,00	3,02
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
$E_1$	—908	—1096	—1229	—928	—1089	—1250
$E_2$	—911	—1051	—1191	—941	—1081	—1222
$E_3$	—928	—1048	—1168	—968	—1088	—1209
$E_4$	—959	—1060	—1160	—1010	—1110	—1210

Процесс подвержен влиянию неопределенности параметров  $K_1$  и  $K_2$ , о которых известны только области их возможных значений: для  $K_1$   $2,97 \leq K_1 \leq 3,00$  и для  $K_2$   $2,97 \leq K_2 \leq 3,03$ . Область значений параметра  $K_1$  разбита на два класса с представляющими их средними значениями 2,975 и 2,985, а область значений  $K_2$  — на три класса со средними 2,98, 3,00 и 3,02. Для каждой из комбинаций этих величин в табл. 7.1 представлены результаты расчетов всех вариантов решения.

Предварительно на основании анализа рассматриваемого процесса была произведена выборка значений параметров. В табл. 7.2 сведены предельные оценки вероятностей  $\tilde{p}_j$  и  $\hat{p}_j$ ,



Таблица 7.2. Частоты реализации полученных из выборки значений параметров  $K_1$  и  $K_2$  и соответствующие доверительные характеристики

	$K_1 < 2,98 \quad K_1 \geq 2,98 \quad K_2 < 2,99 \quad 2,99 \leq K_2 < 3,01 \quad K_2 \geq 3,01$				
Объем выборки	80			120	
Абсолютная частота	38	42	20	83	17
Относительная частота	0,475	0,525	0,1667	0,6916	0,1417
Верхняя граница доверительного интервала $\hat{p}_j$	0,5462	0,5952	0,2146	0,7427	0,1873
Нижняя граница доверительного интервала $\tilde{p}_j$	0,4048	0,4538	0,1277	0,6354	0,1057

вычисленные по формулам (6.17) для доверительных интервалов с учетом вероятности принятия ошибочного решения  $\alpha=0,2$ .

Первые три строки табл. 7.3 содержат, соответственно, значения относительных частот  $h_j(\alpha)$  для верхних  $\hat{p}_j(\alpha)$  и нижних  $\tilde{p}_j(\alpha)$  границ вероятностей различных сочетаний исходных данных. Все эти значения получены по формулам (6.39) как произведения соответствующих частот и оценок вероятностей. Так, например, первые три значения второго столбца таблицы, с учетом данных, приведенных в табл. 7.1 и 7.2, вычисляются следующим образом:  $0,3286=0,475 \cdot 0,6916$ ;  $0,4047=0,5462 \cdot 0,7427$

Таблица 7.3. Частоты реализации и оценки вероятности распределения параметров в заданных интервалах для выборки сочетаний исходных данных при  $w \rightarrow \infty$  (случай 1)

$h_j(\alpha)$  — средние значения вероятностей попадания сочетаний исходных данных в заданные интервалы, вычисленные на основании результатов выборки;

$\tilde{h}_{v,j}(\alpha)$  — значения вероятностей нежелательных реализаций

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
$h_j(\alpha)$	0,0792	0,3286	0,0673	0,0875	0,3631	0,0744
$\hat{p}_j(\alpha)$	0,1172	0,4047	0,1023	0,1277	0,4421	0,1115
$\tilde{p}_j(\alpha)$	0,0517	0,2572	0,0428	0,0580	0,2883	0,0480
$\tilde{h}_{v,j}(\alpha)$	0,0517	0,2572	0,1023	0,0580	0,4193	0,1115

и  $0,2572=0,4048 \cdot 0,6354$ . Четвертая строка табл. 7.3 содержит весовые множители  $\tilde{h}_{v,j}(\alpha)$ , рассчитанные по формуле (6.18) для каждого из рассматриваемых шести сочетаний исходных данных  $F_1, \dots, F_6$  и необходимые для вычисления эмпирического доверительного фактора.

Для расчета эмпирико-прогностического фактора будем использовать формулы (6.30), (6.31) и (6.32), в результате чего получим значения, соответственно, границ для вероятностей  $\tilde{p}_j(\alpha)$ ,  $\hat{p}_j(\alpha)$  и весовых множителей  $\tilde{h}_{v,j}^w(\alpha)$ . Результаты вычислений для числа реализаций  $w=5$  приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4. Частоты реализации и оценки вероятности распределения параметров в заданных интервалах для выборки сочетаний исходных данных при  $w=5$  (случай 2)

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$
$\hat{p}_j(\alpha)$	0,2	0,6	0,2	0,2	0,8	0,2
$\tilde{p}_j(\alpha)$	0	0	0	0	0,2	0
$\tilde{h}_{v,j}^w(\alpha)$	0	0	0,2	0	0,6	0,2

Результаты табл. 7.5 отражают дальнейшие шаги в процессе выбора решения с использованием гибкого критерия. Первый столбец полностью совпадает с последним столбцом табл. 7.1. При этом видно, что результаты сохраняют ту же монотонность поведения в зависимости от внешних состояний для всех вариантов

Таблица 7.5. Числовые значения величин, используемых при применении гибкого критерия принятия решения

Вариант решения	$\min_j e_{ij}$	$\gamma \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j(\alpha)$	$\tilde{M}_{vi}(\alpha) = \sum_{j=1}^n e_{ij} \tilde{h}_{v,j}(\alpha)$	$\tilde{M}_{vi}^w(\alpha) = \sum_{j=1}^n e_{ij} \tilde{h}_{v,j}^w(\alpha)$
$E_1$	—1250	—1075,5	—1097,4	—1149,2
$E_2$	—1222	—1063,5	—1083,3	—1131,2
$E_3$	—1209	—1066,1	—1084,4	—1128,2
$E_4$	—1210	—1083,8	—1099,8	—1140,0

тов решения. Второй столбец содержит для всех четырех вариантов сумму произведений каждого из значений оценочной функции на относительную частоту реализации соответствующего сочетания исходных данных, приведенную в первой строке табл. 7.3. Аналогичным образом получены и два остальных

столбца, только здесь в качестве относительных частот для соответствующих результатов решения выступают данные, приведенные в последних строках табл. 7.3 и 7.4 соответственно.

Расчет эмпирического доверительного фактора выполняется по формуле (6.15); например, для варианта решения  $E_1$  он равен

$$V_v(\alpha)_1 = \frac{-1097,4 - (-1250)}{-1075,5 - (-1250)} = 0,8745,$$

а эмпирико-прогностический доверительный фактор вычисляется по формуле (6.29); например, для варианта решения  $E_3$  он равен

$$V_v^w(\alpha)_3 = \frac{-1128,2 - (-1209)}{-1066,1 - (-1209)} = 0,5654.$$

В табл. 7.6 сведены значения эмпирического и эмпирико-прогностического доверительных факторов, рассчитанные для каждого из четырех вариантов решения.

Таблица 7.6. Доверительные факторы  
для четырех вариантов решения

$E_i$	$V_v(\alpha)_i$	$V_v^w(\alpha)_i$
$E_1$	0,8745	0,5577
$E_2$	0,8750	0,5729
$E_3$	0,8712	0,5654
$E_4$	0,8732	0,5547

В первом случае, когда имеется представительная статистическая выборка состояний исходных данных конечного объема и предстоит бесконечное число  $w$  реализаций решения, его выбор выполняется согласно процедуре (7.1) следующим образом.

$G_1$ : Выполнение условия  $E_i \in E$  гарантировано совокупностью данных, представленных в табл. 7.1.

В соответствии с наиболее часто на практике встречающимися ситуациями ограничения на допустимый риск по  $G_2$  и  $G_3$  не заданы, поэтому остается только определить фактически возможный риск, а лицо, принимающее решение, должно определить, допустима ли его величина.

$G_2$ : Применение эмпирических доверительных факторов  $V_v(\alpha)_i$  (см. разд. 6.4.4) с вероятностью ошибочного решения  $\alpha = 0,2$ .

$G_4$ : При  $w \rightarrow \infty$  выражение в фигурных скобках оценочной

функции (7.7) принимает вид формулы (6.43), поэтому  $e_i$  можно считать равным нулю, причем весовой множитель  $\tilde{h}_{v,j,i}^w(\alpha)$  можно заменить на  $\tilde{h}_{v,j,i}(\alpha)$ , а наиболее неблагоприятный средний результат  $\tilde{M}_v^w(\alpha)_i$  на  $\tilde{M}_v(\alpha)_i$ , так что

$$\tilde{M}_v(\alpha)_i = \sum_{j=1}^n \tilde{h}_{v,j,i}(\alpha) e_{ij}.$$

Значения этих результатов для каждого из вариантов представлены в третьем столбце табл. 7.5.

$G_5$ : Максимизация полученных значений определяет в качестве оптимального варианта  $E_2$  со значением гибкой оценочной функции  $Z_r = -1083,3$ .

$G_3$ : Используя данные первого столбца табл. 7.5, получаем  $Z_{\text{мм}} = \max_i \min_j e_{ij} = -1209$ , а так как  $\min_j e_{2j} = -1222$ , то  $Z_{\text{мм}} - \min_j e_{2j} = 13$  является величиной возможного риска.

Во втором случае, при конечном объеме статистической выборки и  $w=5$ , получаем — вновь без задания ограничения на риск — на основании данных из четвертого столбца табл. 7.5 в качестве оптимального варианта решение  $E_3$  с результатом  $Z_r = -1128,2$ . Таким образом, выбранным оказывается тот же вариант, что и для минимаксного критерия. Следовательно, величина возможного риска равна нулю. Отсюда видно, что характер результата принятия решения при малых числах реализаций решения становится более консервативным благодаря снижению до минимума величины возможного риска.

### 7.3. Адаптивный критерий Кофлера-Менга с использованием кусочно-линейной информации

В работе [22] Е. Кофлер и Г. Менг показывают преимущества предлагаемого ими адаптивного критерия, который ориентирован на уровень информации, имеющейся у лица, принимающего решение. Недостающая информация, образующая множество  $Q^*$ , задается в виде имеющихся в распоряжении априорных вероятностных распределений  $Q$  внешних состояний. При этом принимается предположение о том, что пространство  $B$  этих состояний может быть разложено на непересекающиеся подмножества  $B_v$ :

$$B = \bigcup_v B_v, \quad B_v \cap B_\mu = \Phi \quad \text{для } v \neq \mu \quad (v, \mu = 1, 2, \dots).$$

Лицо, принимающее решение, знает, что внешние состояния из подмножества  $B_v$  встречаются с вероятностью  $p_v$ :

$$\int_{B_v} dQ = p_v, \quad v = 1, 2, \dots, \quad \sum_v p_v = 1.$$

В случае появления состояния  $F \in B$ , при выборе варианта решения  $E_i$  результат представляется в виде величины  $e(F, E_i)$ . Кофлер и Менг определяют оценочную функцию адаптивного критерия следующим образом:

$$Z_{\text{KM}} = \max_{E_i \in E} \inf_{Q \in Q^*} \int_{B_v} e(F, E_i) dQ, \quad (7.11)$$

где  $E$  — множество вариантов решения. Таким образом, решение  $E_0$  является оптимальным, если выполняется равенство

$$\inf_{Q \in Q^*} \int_{B_v} e(F, E_0) dQ = Z_{\text{KM}}.$$

Критерий, определяемый выражением (7.11), может быть охарактеризован как «бернуллизация» минимаксного критерия, поскольку выбор оптимального варианта по Бернулли состоит, по существу, в том, что максимизируется математическое ожидание результата. Область применения критерия может быть расширена, поскольку момент времени принятия решения не задается, и лицо, принимающее решение, располагает возможностью выбрать благоприятное для себя время.

Множество априорных вероятностных распределений образует для конечного числа внешних состояний (пусть  $m$  — их число) конечномерный симплекс  $S(m)$ . Частичная информация состоит тогда в знании некоторого (не вырождающегося до одного распределения) собственного подсимплекса  $P$ . При этом говорят о кусочно-линейной информации (КЛИ), если указанная часть симплекса образует выпуклое многомерное подпространство. Кусочно-линейная информация обладает различными важными свойствами, например, в вероятностном подпространстве этой информации существует реальная точка экстремума, координаты которой составляют матрицу. Кроме того, на основании априорного вероятностного распределения или априорного задания частотного распределения значений параметра по интервалам можно получить апостериорное вероятностное распределение или, соответственно, апостериорное частотное распределение параметра по интервалам, но, конечно, также кусочно-линейного типа.

Если для симплекса распределения внешних состояний  $S^{(m)}$  априорное распределение кусочной информации представлено в форме части этого симплекса  $P^{(m)}$ , то отношение

$$H^{(m)}_{\text{отн}}(\text{КЛИ}) = V(P^{(m)})/V(S^{(m)}), \quad m > 1,$$

где  $V(P^{(m)})$  и  $V(S^{(m)})$  — объемы, соответственно, подпространства  $P^{(m)}$  и пространства  $S^{(m)}$ , представляет собой относительную энтропию.

Чувствительностью  $\sigma(\Delta I)$  ситуации  $ES$  по отношению к заданному изменению информации  $\Delta I$  называется приращение

$\Delta V(ES, \Delta I)$  результата  $V(ES)$ , вызванное изменением  $\Delta I$ .

Наряду с одношаговыми существуют также и многошаговые процессы принятия решения. Формирование процесса адаптации выполняется с использованием известной в стохастической динамической оптимизации FB-стратегии (стратегии учета обратной связи, см. 9.4.2). Специально для усвоения метода авторы вводят понятие стохастической линейной программы  $Ax \leq b, x \geq 0, z_1 = c'x = \max$ .

Цель Кофлера и Менга состояла в количественном согласовании информации, характеризующей конкретную ситуацию, с возможными вариантами решения, что совпадает с постановкой задачи в разд. 7.1, хотя критерии выбора различаются.

Метод КЛИ не содержит никаких конкретных указаний, как и откуда получать оговоренную выше кусочно-линейную информацию при наличии объективного описания существующей ситуации. Таким образом, степень объективности КЛИ оценить нельзя, что, конечно, серьезно ограничивает возможности широкого применения адаптивного критерия.

Рассматривая вопросы, связанные с оценкой риска, аналогично рассуждениям, проведенным в разд. 7.1, и интерпретируя границы доверительных интервалов вероятностных оценок распределения параметров или полученные для них наиболее неблагоприятные распределения параметров (см. разд. 6.4.1 и 6.4.2) как экстремальные точки и, соответственно, экстремальное распределение в смысле [22], получим одинаковые результаты решения как с использованием гибкого критерия (7.1), так и с использованием адаптивного критерия. Однако вычислительные затраты, связанные с применением адаптивного критерия, существенно выше. Экстремальные распределения или точки необходимо получать из систем неравенств, которые составляются на основании всей возможной информации о распределении внешних состояний. Риск, сопутствующий принятию решения по адаптивному критерию [22], не оценивается, тогда как использование гибкого критерия (7.1) предусматривает оценку и контроль величины допустимого риска. Гибкий критерий принятия решения (7.1) характеризуется большей степенью общности с классическими критериями — при соответствующей оценке риска  $\epsilon_i$  выбор варианта решения может выполняться, кроме выше описанных случаев, по S-критерию (разд. 3.3), а использование эмпирико-прогностического доверительного фактора способствует эффекту стабилизации выбора варианта решения при повторных случаях принятия решения в аналогичной ситуации. Таким образом, область применения данного критерия значительно шире по сравнению с классическими и содержит элементы моделирования процесса с целью улучшения качества решения.

---

## СУБЪЕКТИВНО УСТАНОВЛИВАЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ

---

### 8.1. Проблематика

Несмотря на само собой разумеющееся требование — определять параметры настолько исчерпывающе, насколько это возможно, из объективных данных (например, на основе математических, физических или технических закономерностей или возможно более точных измерений и наблюдений), встречаются, однако, ситуации, когда уровень имеющейся информации столь низок, что нельзя избежать субъективного установления параметров. Таким образом, в технике, как и в других областях деятельности, существует множество проблем, связанных с субъективным установлением параметров. Далее будут приведены некоторые сведения и указания из этой области, причем прежде всего будет обращено внимание на недостатки и опасность ошибок.

Прежде всего нужно подчеркнуть, что субъективное определение параметров в технике не снискало себе доброй славы. Так, например, сплошь и рядом один и тот же специалист, оценивая вероятности по различным дискретным реализациям какого-либо параметра, приходит к противоречивым выводам о его истинном значении. Оценки компетентных комиссий экспертов также порой ведут к разочаровывающим результатам, так как за счет увеличения числа экспертов устраняются скорее случайные, а не систематические ошибки, но зато возникают другие источники ошибок, такие, как взаимное влияние оценок.

Несмотря на это, субъективные оценки в проектно-конструкторских работах и промышленности часто присутствуют в неконтролируемой форме. Они проявляются в произвольных, зачастую лишь словесно описанных предположениях, которые, с одной стороны, нередко невыгодным образом ограничивают результат, а с другой, освобождают исследователя от анализа влияний различных факторов. Даже в стандартах встречаются такие субъективно установленные параметры, коэффициенты и допущения, не имеющие никакого серьезного обоснования.

Иногда вопрос о правильности таких предположений всплывает через годы, и нет никакой возможности восстановить, на основании чего и как они были сформулированы. Понятно, что специалисты часто располагают информацией о технической

ситуации, которую нельзя выразить в фиксированной аналитической и количественной форме. Иногда можно сказать лишь то, что определенные комбинации состояний невозможны, другие — возможны, а третьи — в большей или меньшей степени вероятны. Эти утверждения основываются на жизненном опыте, аналогичных суждениях о сходных процессах или приближительных расчетах. Когда скоро нет более точной информации, разумно использовать и эти грубые предварительные знания в возможно более упорядоченной, обозримой и воспроизводимой форме.

Как уже указывалось выше, без субъективного определения параметров в технике не обойтись, несмотря на связанные с этим трудности. Это может стать необходимым, если нельзя измерить нагрузки, прочность, несущую способность или ресурс либо нужно выполнить требования к качеству приборов или установок. Необходимы такие оценки и при сетевом планировании.

Нужно делать различие между параметрами, которые должны быть оценены на основе прошлой информации — выборочных данных и результатов наблюдений, и такими параметрами, значения которых с большей или меньшей долей случайности должны реализоваться в будущем. В последнем случае нужно прежде всего оценить, останутся ли теперешние условия неизменными в будущем, когда будут реализовываться прогнозируемые значения параметра. Если дальнейшее развитие зависит от произвольных и необозримых решений, то информация из прошлых наблюдений может потерять значение и оценка в конце концов может вообще не состояться.

В заключение можно сформулировать такое основное положение относительно проблемы субъективных оценок: субъективные оценки допустимы только тогда, когда отсутствуют объективные возможности для получения требуемых данных. В том случае, когда субъективные оценки неизбежны, их необходимо осуществлять по единым проверенным правилам, следуя определенному образу действий, чтобы свести к минимуму влияние недостатка информации. Такие правила и образ действий будут описаны ниже.

## 8.2. Подготовка и проведение оценок

Здесь мы дадим общие рекомендации о том, как проводить подготовительный этап субъективных оценок. От конкретной ситуации зависит, в какой мере эти рекомендации могут быть учтены.



После определения подлежащего оценке объекта и тщательной проверки, что необходимые данные можно получить только субъективным путем, субъективную оценку целесообразно подготавливать по следующим этапам:

- 1) выбор области оценки;
- 2) изготовление формуляров для опроса и подведения итогов;
- 3) организация (регистрация, план проведения, программа расчетов и т. д.) оценивания;
- 4) определение общего числа экспертов и персональный выбор.

Кроме того, нужно учесть следующее.

Область оценки должна быть достаточно широкой, чтобы с самого начала не повлиять на результат оценки; при необходимости следует предварительно провести специальную экспертизу. Опросный лист отражает в сжатой и ясной форме задачу опроса и содержит далее интересующие организаторов вопросы, которые могут быть, например, даны и в форме таблиц, чтобы опрашиваемому достаточно было просто отметить вариант ответа. Иногда имеет смысл провести предварительно опрос в узком кругу специально не оповещенных заранее сотрудников, поскольку таким путем можно выявить неясности и нежелательные интерпретации вопросов, а также получить полезные рекомендации относительно дополнительных вопросов.

Организация оценивания тесно связана с конкретными данными, относящимися к задаче, так что общие указания здесь обычно не требуются. Важно установить соразмерное число опрашиваемых. В особых случаях, когда нет оснований бояться ни случайных, ни систематических ошибок, достаточно узнать мнение единственного компетентного специалиста. В общем случае, когда прежде всего речь идет об усреднении случайных ошибок, правильную линию должна наметить связь, описываемая формулой

$$N \geq q^2(\alpha) (D^2/F^2). \quad (8.1)$$

В этом соотношении, основывающемся на центральной предельной теореме теории вероятностей, символы обозначают:  $q(\alpha)$  — квантиль порядка  $1-\alpha/2$  стандартного нормального распределения;  $D^2$  — дисперсия оценки;  $F$  — допустимое отклонение полученных оценочных значений от того значения, которое получилось бы при бесконечном числе оценивающих;  $N$  — число экспертов, при котором вероятность того, что ошибка оценки не превышает  $F$ , по меньшей мере равна  $1-\alpha$ .

Величину допустимого отклонения  $F$  и вероятность ошибки  $\alpha$  задать относительно просто, после чего легко определить,

например, из таблиц квантиль  $q(\alpha)$  [21]. Чтобы с помощью формулы (8.1) рассчитать минимально необходимое число  $N$ , нужно знать дисперсию оценки, которая характеризует рассеяние отдельного оценочного значения и в свою очередь определяется совокупностью оценок  $x_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , со средним значением и дисперсией:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (8.2)$$

$$D^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (8.3)$$

Однако перед проведением оценки значения  $x_i$  неизвестны; кроме того, в формулу для  $D^2$  входит  $N$ , которое как раз и нужно определить. Поэтому применение формулы (8.1) предполагает, что мы уже знаем величину дисперсии  $D^2$ , например из прежних аналогичных оценок или предварительно проведенной в порядке подготовки пробной оценки. В конкретных оцениваемых ситуациях можно, например, провести оценку в кругу наиболее компетентных лиц. При этом верхняя граница для  $N$  определится практическими соображениями (допустимыми затратами или фактически имеющимся числом нужных специалистов и т. п.), а затем по формулам (8.2) и (8.3) рассчитывается величина дисперсии  $D^2$ . Если после этого для заданных значений  $\alpha$  и  $F$  величина, стоящая в правой части формулы (8.1), не превышает  $N$ , то оценку можно считать справедливой и характеризующейся вероятностью ошибки  $\alpha$  и максимальным отклонением  $F$ .

В заключение следует добавить, что к субъективной оценке нельзя привлекать пристрастных лиц. Нельзя допустить, чтобы уже при постановке проблемы проявились предубежденность и заинтересованность опрашиваемых в определенном результате.

Точка зрения конструкторов, проектировщиков, изготовителей и эксплуатационников технических устройств по определенным вопросам может быть весьма типичной, ярко выраженной и резко различной для указанных групп. Желательно, чтобы эксперт обладал такими качествами, как:

- предварительные знания и профессионализм, достаточные для суждения об оцениваемом объекте;
- самостоятельность суждений, хорошая память, чтобы промежуток времени между заключением об оценке и моментом опроса не влиял на результат;
- наличие знаний о сходных случаях;
- логические способности для суждения об аналогичных, но не идентичных ситуациях.

Обычно эти качества очень трудно проконтролировать и нет каких-либо точных критериев для их распознавания. Руководитель экспертного опроса должен в значительной степени полагаться здесь на собственный опыт и интуицию. С другой стороны, отказываться от учета этих требований нельзя.

Субъективная оценка может касаться значения какой-то важной величины, границ интервала, в котором следует ожидать появления или распределения этой величины. Не стоит, однако, ожидать очень уж хорошего согласия субъективно оцененного распределения с истинным.

### 8.3. Обработка данных

#### 8.3.1. Интерквартиль оцениваемой величины

Данные для оценки целесообразно обработать по методу интервалов [23]. При этом для искомой величины исходят из взятого с запасом диапазона и разбивают этот диапазон на интервалы (обычно одинаковые). Схема опросного листа приведена в табл. 8.1. (Строго говоря, в такой таблице границы интервалов следовало бы указывать только раз. В противном слу-

Таблица 8.1. Схема опросного листа

Интервалы оцениваемой величины	$a \dots b$	$b \dots c$	$c \dots d$	$d \dots e$	$e \dots$
Отметки участников опроса			+	+	

чае в инструкции, указывающей, как маркировать ответы в опросном листе с дважды повторенными значениями границ, нужно определенно установить, следует ли отмечать левый, правый или оба интервала.) От опрашиваемых требуется отметить один или несколько интервалов, в которые должна, по их мнению, попасть величина. По методу интервалов из полученного ряда отметок выделяют центральную часть как оценочный диапазон искомой величины. В психологии это так называемый интерквартильный диапазон [23], в который попадает 50% оценок, группирующихся вокруг центра. Этот диапазон определяют следующим образом.

Сначала рассматривают закрытый слева и открытый справа диапазон  $[a, b)$ , в котором предполагается наличие оценивае-

мой величины, и делят его на  $K$  равновеликих интервалов  $J_j = [a_j, b_j)$ ,  $j=1, \dots, K$ , длиной  $w$ :

$$[a, b) = \bigcup_{j=1}^K J_j, \quad Kw = b - a. \quad (8.4)$$

По результатам опроса получают  $N$  отметок для значений в диапазоне  $[a, b)$ , разделенном на  $K$  интервалов. Определим теперь два индекса  $u$  и  $o$  и соответственно интервалы  $J_u$  и  $J_o$  так, чтобы интервалы  $J_1, \dots, J_{u-1}$ , а также  $J_{o+1}, \dots, J_K$  содержали меньше, чем  $N/4$ , всех отметок, а интервалы  $J_1, \dots, J_u$ , как и интервалы  $J_o, \dots, J_K$  — по меньшей мере по  $N/4$  отметок. Если обозначить символом  $\#(J_j)$  общее число попавших в интервал  $J_j$  отметок,  $j=1, \dots, K$ , то

$$\begin{aligned} n'_u &:= N/4 - \sum_{j=1}^{u-1} \#(J_j), & n'_o &:= N/4 - \sum_{j=o+1}^K \#(J_j), \\ n_u &:= \#(J_u), & n_o &:= \#(J_o), \end{aligned} \quad (8.5)$$

а также

$$Q_{0,25} := a_u + \frac{n'_u}{n_u} w, \quad Q_{0,75} := b_o - \frac{n'_o}{n_o} w, \quad (8.6)$$

где  $n_u, n_o$  — общее число элементов в интервалах  $J_u$  и, соответственно,  $J_o$ ;  $n'_u$  — общее число находящихся в интервале  $J_u$  элементов нижнего квартиля\*;  $n'_o$  — общее число находящихся в интервале  $J_o$  элементов верхнего квартиля;  $a_u$  — нижняя граница интервала  $J_u$ ;  $b_o$  — верхняя граница интервала  $J_o$ ;  $Q_{0,25}$  — верхняя граница нижнего квартиля;  $Q_{0,75}$  — нижняя граница верхнего квартиля;  $w$  — длина интервала  $J_j$ . Отсюда получают ширину интерквартиля  $Q'$  по формуле

$$Q := [Q_{0,25}, Q_{0,75}]; \quad Q' = Q_{0,75} - Q_{0,25}. \quad (8.7)$$

Таким образом, значениями  $Q_{0,25}$  и  $Q_{0,75}$  определяются найденные субъективным путем границы некоторого параметра. Ширину  $w$  интервалов, на которые разбивается диапазон, следует выбирать не слишком малой, рекомендуется  $Q' < 3w$  [23].

Если имеется недостаточная, но объективная информация об оцениваемой величине в форме очень маленькой по объему выборки, то (оценку можно, правда, проводить дальше) полученный субъективный результат должен быть подкреплён имеющейся объективной информацией. Это делают, считая результаты такой выборки ответом некоего фиктивного оценивающего лица и вводя их в обработку. При этом, однако, не-

---

\* Напомним, что квартилями называют квантили уровней 0,25 и 0,75. — Прим. перев.

необходимо выполнить дополнительные условия:

$$Q_{0,25} < J_u,$$

$$Q_{0,75} > J_o$$

(где  $J_u$  — нижняя граница самого нижнего интервала в выборке, а  $J_o$  — верхняя граница самого верхнего интервала в выборке), чтобы объективные данные не оказались ограниченными интерквартилем.

### 8.3.2. Взвешивание

В отличие от описанного выше ограничения оцениваемой величины с помощью интерквартиля нередко оказывается целесообразным получить распределения найденных оценкой величин. Сначала в зависимости от имеющегося опыта, который трудно учесть логическим или объективным путем, эксперты высказывают суждения относительно маловероятности реализации того или иного распределения. В результате получается ограниченное и пронормированное по весу подмножество распределений, из которого и следует исходить.

Конкретно образ действия заключается в том, что для оцениваемой величины устанавливают диапазон  $\tilde{S}$  конечного ряда значений  $S_r$ :

$$\tilde{S} = \{S_r\}, \quad r=1, \dots, R, \quad (8.8)$$

где  $R$  — общее число выбранных дискретных значений оцениваемой величины. Каждый из  $N$  равноценных экспертов дает оценку этой дискретизации, указывая вероятностное распределение  $\tilde{S}$ :

$$\{b_{rs}\} \quad \text{с} \quad 0 \leq b_{rs} \leq 1, \quad r=1, \dots, R, \quad \sum_{r=1}^R b_{rs} = 1, \quad (8.9)$$

$s=1, \dots, N$ .

Искомое распределение получается как смешанное путем усреднения оценок  $N$  экспертов:

$$\bar{b}_r := \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N b_{rs}, \quad r=1, \dots, R. \quad (8.10)$$

Здесь  $0 \leq \bar{b}_r \leq 1$  и  $\sum_{r=1}^R \bar{b}_r = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \sum_{r=1}^R b_{rs} = 1$ . Для получения оценки интересующего нас параметра имеются следующие возможности. Естественным образом определяют среднее значение смешанного распределения:

$$\bar{b} := \sum_{r=1}^R \bar{b}_r S_r. \quad (8.11)$$

Далее в качестве оценки параметра можно использовать так называемую медианную оценку, т. е. 50%-й квантиль смешанного распределения, определяя ее по формуле:

$$\sum_{1 \leq r \leq ME} \tilde{b}_r \geq \frac{1}{2}, \quad \sum_{ME < r \leq M} \tilde{b}_r < \frac{1}{2}.$$

В заключение определяют характерные значения оценки — так называемые модальные величины распределения. Это такие особые значения, которые имеют максимальную относительную частоту появления; поэтому иногда их называют предпочтительными. Определяются они условием

$$MO = \{w \in \check{S} : w = \max_r \tilde{b}_r\},$$

где  $MO$  — множество модальных величин.

Для наиболее часто встречающихся в прикладных задачах распределений медиана лежит между средним и модальным значениями. Практика подтверждает, что среднюю величину  $\bar{b}$  и медиану  $ME$  по сравнению с модальной величиной  $MO$  нужно оценивать с двойным весом и вычислять, таким образом, оцениваемую величину следующим образом:

$$\bar{\bar{b}} = \frac{1}{5} (2\bar{b} + 2ME + MO).$$

#### ✓ § 4. Гибкий выбор при субъективной полезной информации

Описанный в гл. 7 гибкий критерий принятия решения базируется, как особенно ясно из условия  $G_3$  и последнего фактора в  $G_4$  [см. формулы (7.4) и (7.5)], главным образом на минимаксном (ММ) критерии. И разумно, и желательно, чтобы, например, при отсутствующих или ограниченных возможностях наблюдения, характеризующихся крайне малым объемом выборки, пессимистический, т. е. ориентирующийся на наихудшие условия, ММ-критерий служил бы оптимальной страховкой при принятии решения. Однако в практике принятия решений часто встречаются также ситуации, в которых, несмотря на отсутствующие или недостаточные возможности наблюдения, имеется полезная информация, которую нельзя обработать объективным путем. При объективизации процессов принятия решения такая субъективная информация неизбежно остается без внимания. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли обработать эту информацию, переводя ее субъективными взвешенными оценками или гипотетическими вероятностями  $\tilde{q}_j$ ,  $j=1, \dots, n$  ( $n$  — общее число возможных состояний), в категорию, аналогичную часто-

те выборки, и применяя гибкий критерий, чтобы не исходить из ситуации, более пессимистической, чем фактически имеющаяся. При широкой возможности субъективных влияний нужно всегда учитывать опасность неконтролируемых умозаключений, воздействующих на результаты решения. Базу для модифицированной обработки обеспечивает  $G$ -критерий [разд. 4.3, формула (4.9)]. В этом случае гипотетические вероятности  $\tilde{q}_j$  можно учесть в оценочной функции

$$Z_G = \max_i \min_j e_{ij} \tilde{q}_j,$$

не прибегая к осторожности ММ-критерия. Вместо условия  $G_3$  [см. (7.4)] получаем теперь

$$\tilde{G}_3: Z_G - \min_j e_{ij} \leq \varepsilon_{\text{доп}, i} \quad (8.12)$$

и гибкий критерий с гипотетической вероятностью

$$\tilde{G}_4: \tilde{Z}_r = \max_i \left\{ v_i \sum_{j=1}^n e_{ij} h_j \tilde{q}_j + (1 - v_i) \min (e_{ij} \tilde{q}_j + \varepsilon_i) \right\}. \quad (8.13)$$

причем  $\sum_{j=1}^n h_j = 1$  и  $\sum_{j=1}^n \tilde{q}_j = 1$ , а также должно выполняться основное для  $G$ -критерия предположение, а именно,  $e_{ij} < 0$ . Соответствующие изменения должны претерпеть и доверительные факторы из разд. 6.4, например, для эмпирико-прогностического доверительного фактора (6.29) и соответственно (6.35) теперь получим:

$$\tilde{V}_v^w(\alpha)_i = \frac{\sum_{j=1}^n e_{ij} \tilde{h}_j^w \tilde{q}_j - \min_j e_{ij} \tilde{q}_j}{\sum_{j=1}^n e_{ij} h_j \tilde{q}_j - \min_j e_{ij} \tilde{q}_j}. \quad (8.14)$$

Использование этого модифицированного гибкого критерия в остальном соответствует описанному в разд. 7.1 способу. Формально наряду с заменой  $G_3$  на  $\tilde{G}_3$  следует заменить и результаты  $e_{ij}$  на  $e_{ij} \tilde{q}_j$ .

## 8.5. Примеры

Описанные в разд. 8.3 методы оценки будут здесь проиллюстрированы на конкретных примерах. В рассматриваемом ниже примере речь идет об оценке числа расположенных амфитеатром рядов в лекционном зале.

Таблица 8.2. Число отметок в примере оценки

Интервал	Число отметок	Интервал	Число отметок	Интервал	Число отметок
13—16	2	22—25	4	31—34	0
16—19	2	25—28	14	34—37	2
19—22	5	28—31	8	37—40	3

Для определения интерквартиля в соответствии с методом разд. 8.3.1 были привлечены 40 студентов, каждый из которых должен был отметить один из девяти интервалов в табл. 8.2; полученные абсолютные значения частоты оценок указаны в колонках «Число отметок». Введенные в разд. 8.3.1 индексы интервалов  $u$  и  $o$ , поскольку  $N=40$  и  $N/4=10$ , в данном случае равны  $u=4$  и  $o=6$ , откуда в соответствии с (8.5) получаем  $n'_u=10-9=1$ ,  $n'_o=10-5=5$ ,  $n_u=4$ ,  $n_o=8$  и далее в соответствии с (8.6) при  $w=3$   $Q_{0,25}=22+(1/4) \cdot 3=22,75$  и  $Q_{0,75}=31-(5/8) \cdot 3=29,125$ , так что интерквартиль по (8.7)  $Q'$  равен 6,375. Поскольку, кроме того, выполняется условие  $Q'/w=2,125 < 3$ , можно в соответствии с приведенным в разд. 8.3.1 правилом оценку общего числа рядов (точное число которых 25) интерквартиль-

Таблица 8.3. Оценка преподавателей

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_r$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$\sum_{s=1}^N b_{sr}$	$\bar{b}_r$	$\bar{b}_r S_r$
16	0,5						0,5	0,0833	1,3328
17	0,2						0,2	0,0333	0,5661
18	0,2		0,1				0,3	0,0500	0,9000
19	0,1		0,1				0,2	0,0333	0,6327
20			0,2				0,2	0,0333	0,6667
21			0,3	0,2			0,5	0,0833	1,7493
22			0,2	0,5			0,7	0,1167	2,5674
23			0,1	0,2			0,3	0,0500	1,1500
24		0,2		0,1			0,3	0,0500	1,2000
25		0,5					0,5	0,0833	2,0825
26		0,2					0,2	0,0333	0,8658
27		0,1				0,05	0,15	0,0250	0,6750
28					0,1	0,1	0,2	0,0333	0,9324
29					0,2	0,2	0,4	0,0667	1,9343
30					0,4	0,5	0,9	0,1500	4,5000
31					0,2	0,1	0,3	0,0500	1,5500
32					0,1	0,05	0,15	0,0250	0,8000



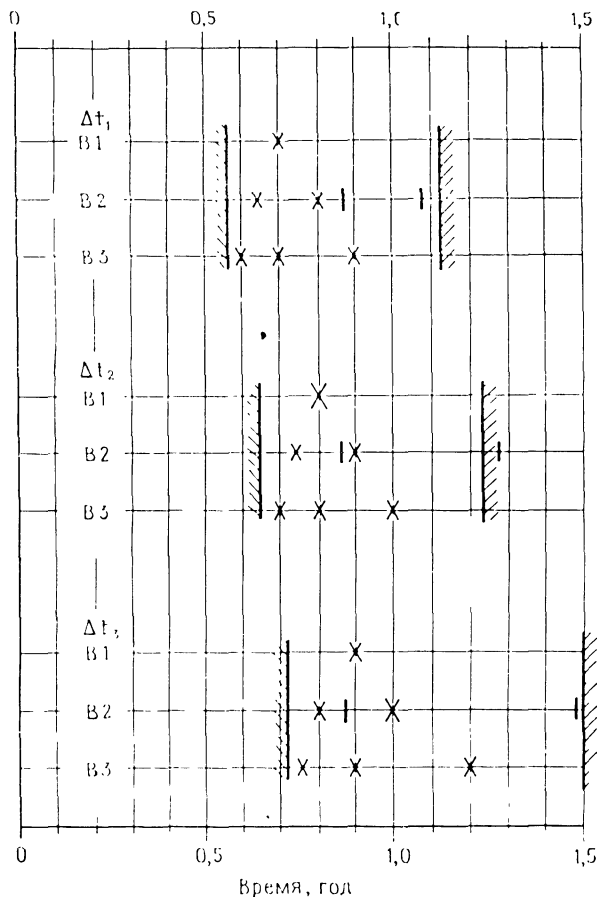


Рис. 8.1. Результаты оценки.

Вертикальными отрезками прямых со штриховкой обозначены границы диапазонов, а отрезками без штриховки — выбранные диапазоны. Крестиками отмечены предпочтительные значения.

ными границами  $Q_{0,25}=22,75$  и  $Q_{0,75}=29,125$  считать удовлетворительной. Остается вычислить для рассматриваемого случая оценку как среднее арифметическое:  $(Q_{0,25}+Q_{0,75})/2=25,987$ .

Далее к оценке числа рядов в том же зале были привлечены преподаватели; результаты, полученные методом, описанным в разд. 8.3.2, сведены в табл. 8.3.

В колонке 1 приведена оценка общего числа рядов  $S_r$  от 16 до 32, полученная исходя из интервала (16, 40), следовательно, в  $r=1, \dots, R$  имеем  $R=17$ . В колонках от 2-й до 7-й даны оцен-

ки в форме дискретных распределений вероятности  $b_{sr}$ ,  $r = 1, \dots, R$ , шести участков опроса  $P_s$ ,  $s = 1, \dots, 6$ . Колонка 8 содержит суммарные значения  $\sum_{s=1}^6 b_{sr}$ , а в колонке 9 — вероятности  $\bar{b}_r$  смешанного распределения [см. формулу (8.10)]. В колонке 10 даны произведения  $\bar{b}_r S_r$ , из которых путем сложения по формуле (8.11) получается значение оценки для числа рядов  $\bar{b} = 23,6 \approx 24$ . Оценка через значение медианы, при которой в ходе последовательного суммирования вероятностей  $\bar{b}_r$  смешанного распределения впервые достигается значение 0,5, дает такое общее число рядов, при котором в ходе последовательного суммирования в колонке 8 впервые достигается значение  $0,5 \cdot 6 = 3$ , т. е. также 24. Модальная величина смешанного распределения равна 30, как показывает колонка 8. Применение этого так называемого предпочтительного значения как оценки общего числа рядов менее выгодно, что вообще соответствует сущности модальной величины. Если учесть среднее значение  $\bar{b} = 24$  (так же, как и медианное значение 24) с двойным весом, а модальную величину 30 — с одинарным, то получим  $\frac{1}{5} (2 \cdot 24 + 2 \cdot 24 + 30) = 25,2 \approx 25$ , т. е. отличную оценку.

На рис. 8.1 показан результат практической оценки из работы [24].

Для некоторой технической системы необходимо в условиях недостатка информации спланировать мероприятия по ее развитию на длительный срок вперед. Для этого необходимо дать прогноз нагрузки. Для интервалов времени от  $\Delta t_1$  до  $\Delta t_3$  должны быть определены границы диапазонов ожидаемого возрастания нагрузки и для каждого диапазона — предпочтительные значения  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ . Оценочные значения  $B_2$  и  $B_3$  входят в модель принятия решения как дискретные характеристики внешних состояний системы. Благодаря оценке первоначально принятый диапазон возрастания нагрузки был изменен, в результате чего была достигнута существенная оптимизация.

---

## АНАЛИЗ СИТУАЦИЙ ВЫБОРА РЕШЕНИЯ

---

### 9.1. Общая структура

Под ситуацией выбора решения следует понимать все элементы задачи, такие, как состояния исходных данных, варианты решения и их последствия, а также все оказывающие на решение существенное влияние внешние факторы как объективного, так и субъективного характера.

В табл. 9.1 эти элементы показаны в их важнейших связях. Область влияния лица, принимающего решение, достаточно велика. Варианты решения, тем не менее, определяются главным образом параметрами системы или процесса. Факторы, влияющие на принятие решения, занимают диапазон от крайне субъективных, определяемых компетенцией и осведомленностью принимающего решение и проявляющихся в ускоренном выборе или затягивании решения, до таких объективных условий, как технические данные, характеристики, модели, методы и всевозможного рода вспомогательные средства. Наблюдения показывают, что при принятии технико-экономических решений часто исходят, кроме того, просто из интуиции и жизненного опыта. В обыденной практике принимающие решение ориентируются лишь на общий имеющийся у них запас математических знаний. Только относительно немногие процедуры принятия решения полностью математически моделируются и обосновываются. По затраченным для обработки средствам решения можно разбить на три группы: 1) эмпирические, 2) опирающиеся на некоторые количественные сравнительные оценки и 3) принятые на основании построенной с исчерпывающей полнотой модели. Величина возможных ошибок находится в обратной зависимости по отношению к степени точности описания задачи и затраченным на выбор решения усилиям и является наибольшей при эмпирических решениях. Процесс принятия решения может быть описан в категориях следующих фаз: инициатива, описание проблемы, анализ ситуации, постановка задачи, анализ имеющейся информации, дискретизация и комбинирование внешних условий, выработка альтернатив, расчет и оценка последствий, выбор рациональных альтернатив, проверка результатов, оформление решения. Схема процесса принятия решения

показана на рис. 9.1, а дальнейшие подробности развиты в разд. 9.4.

Ситуации принятия решения могут характеризоваться единственной или многими целями. К ориентированным на единственную цель относятся решения, последствия которых могут быть описаны единственной, например финансовой, категорией параметров, таких, как цена, затраты, прибыль или ущерб. При многоцелевых решениях оценить и сравнить отдельные цели в единых универсальных единицах нельзя.

Если, например, для какого-либо прибора имеют значение стоимость изготовления, срок поставки, надежность, простота

*Таблица 9.1. Элементы ситуации выбора решения*

Лицо, принимающее решение	Существо решения, процесс решения, цели, предпочтения
Система (процесс)	Варианты, функция полезности, число реализаций, критерий выбора
Внешние условия	Состояния

монтажа, удобство обслуживания и влияние на другие приборы, а указанные свойства будут определяться выбором варианта решения — мы имеем дело с многоцелевым решением. Это требует, как правило, упорядочения ценностей или предпочтений, чтобы взвесить важность частичных целей. Принимающий решение должен либо получить необходимые для этого объективные сведения, либо субъективно установить их. Более подробные указания на образ действий при принятии многоцелевых решений изложены в гл. 12.

О критериях выбора решения мы здесь лишь упомянем, поскольку этот вопрос рассматривался выше. Функция полезности и число реализаций решения получают из конкретных данных о рассматриваемой системе или процессе. Для ситуации выбора технико-экономических решений часто характерна неопределенность имеющейся информации. Эта неопределенность вынуждает принимающего решение выявить характеристики окружения, которые зависят от различных параметров. Неопределенность имеющейся информации может быть следствием погрешности в определении параметра или собственно неопределенности. Причиной этого могут быть как отклонения, так и ошибки.

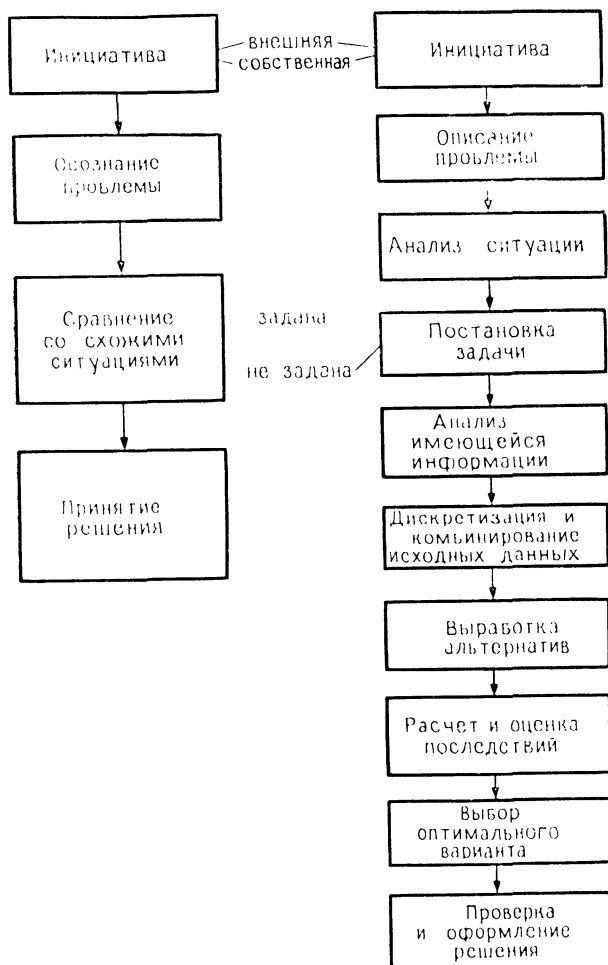


Рис. 9.1. Процессы принятия решений — рутинного и основанного на исследовании модели.

## 9.2. Варианты решения и исходные данные

Топологическая схема (граф) может давать хорошее общее представление о состоянии некоторой системы, альтернативных путях протекания и результатах какого-либо процесса.

Описание такого графа можно дать на примере трех параллельно работающих агрегатов  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  (рис. 9.2). В этом примере  $\bar{A}_i$  означает отказ  $i$ -го агрегата, а  $A_i$  — его работоспо-

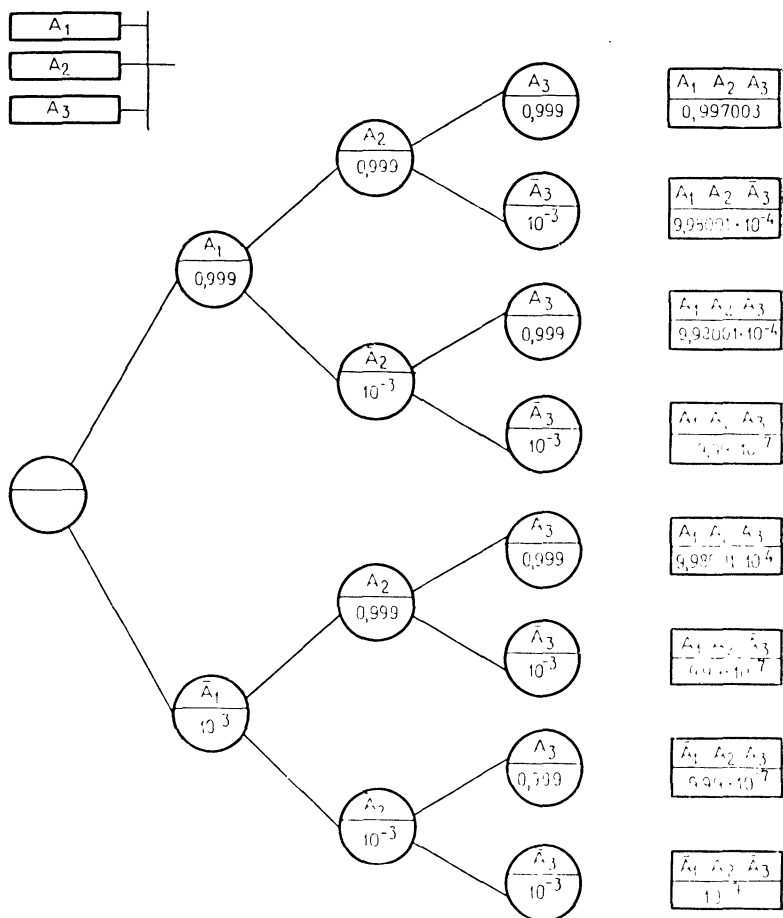


Рис. 9.2. Дерево событий для случая выхода из строя трех параллельно работающих агрегатов.

собное состояние; вероятность отказа в рассматриваемый отрезок времени одинакова для каждого из трех агрегатов:  $q_i = 10^{-3}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Исходным пунктом схемы является кружок, который представляет в общем виде рассматриваемое состояние. Из этого узла ветви ведут к узлам, представляющим состояние первого агрегата (в соответствии с заданными вероятностями), и таким же образом дальше от каждого из этих узлов к следующим, в которых указаны состояния второго и третьего агрегатов, пока на выходе не получатся все возможные комбинации событий.

В результате получается дерево событий, в котором каждый путь от исходной точки до конечного узла описывает одну из возможных эволюций системы. В прямоугольниках справа от конечных узлов на рис. 9.2 еще раз указан результат события, соответствующий пути к этому конечному узлу. В рассматриваемом примере с тремя параллельно работающими агрегатами в прямоугольниках указаны результирующие вероятности для состояния системы, которые благодаря независимости выхода из строя отдельных агрегатов получаются просто перемножением отдельных вероятностей.

Дерево событий можно далее преобразовать в дерево решений, в котором различают узлы событий  $P$  и узлы решений  $D$  (рис. 9.3). Можно себе представить, что в узлах событий выбор



Рис. 9.3. Узлы событий  $P$  и узлы решений  $D$ .

дальнейшего пути определяется внешними условиями, а в узлах решений — лицом, принимающим решение. Все возможные действия могут быть связаны с узлами решений. В остальном действуют те же правила, что и для дерева событий. На рис. 9.4 показан пример дерева решений. Из узла  $D_1$  исходят мероприятия по техническому обслуживанию, например регламентные проверки. В нашем примере их три —  $D_1 \rightarrow D_2$ ,  $D_1 \rightarrow D_3$ ,  $D_1 \rightarrow D_4$ . На следующей стадии фиксируются временные интервалы (циклы техобслуживания), по окончании которых принятые меры должны стать действенными. При этом в том или ином случае могут достигаться различные функциональные свойства. Они проявляются в различной степени обновления, происходящего в узлах событий  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , и ведут к узлам  $P_{ik}$ . Эти последние в свою очередь представляют с соответствующими вероятностями наличие ( $S$ ) или отсутствие ( $\bar{S}$ ) повреждения. Общее число действий и событий здесь выбрано схематично. На рис. 9.5 показано в общем виде дерево решений с действиями  $d_{rk}$  и случайными событиями  $f_{sl}$ . По указанным на рисунке ветвям можно систематически проследить изменение состояний и варианты решений.

Деревья решений легко поддаются модификации: при необходимости их можно дополнительно развить, а в случаях, когда какие-либо ветви практически лишены значения, — соответственно уменьшить. Узлы решений, если они связаны с одним дей-

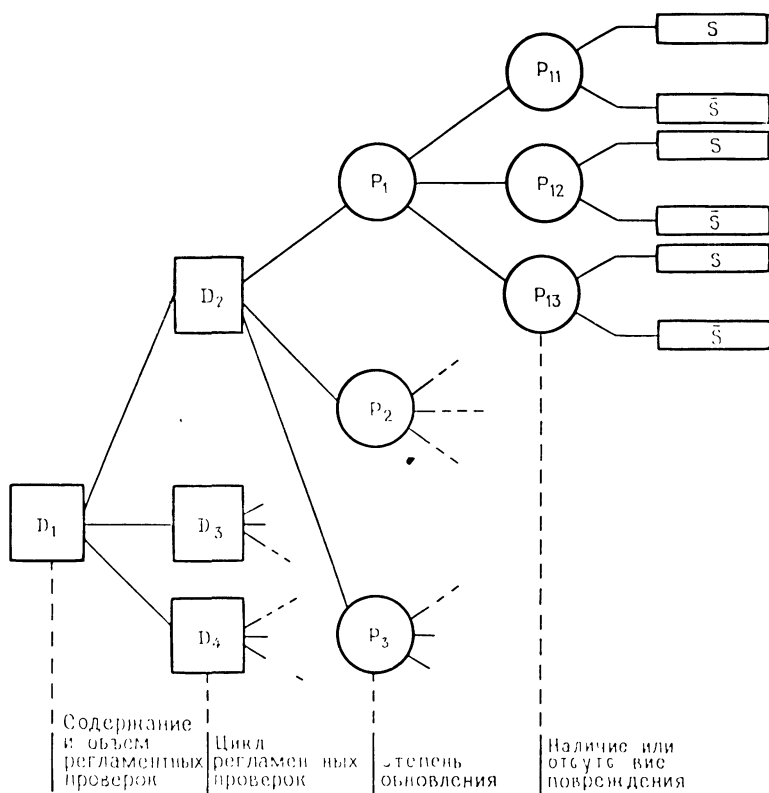


Рис. 9.4. Схематическое дерево решений для технического обслуживания группы агрегатов.

ствием и не разделены узлами событий, могут быть объединены. То же справедливо и для узлов событий (рис. 9.6). Таким образом, на рис. 9.6 можно исключить узел  $D_2$ , а решение  $D_2$  объединить с  $D_1$ , считая его заключительной стадией  $D_1$ , как показано на рис. 9.6 справа. Аналогичным образом можно поступить, присоединив  $P_8$  к  $P_6$ .

Деревья решений иерархически представляют собой логическую структуру принятия решений и облегчают тем самым понимание задачи и процесс ее решения. В отличие от матрицы решений здесь можно видеть временной ход процесса принятия решения. Дерево решений нельзя, однако, в общем случае представить простой матрицей решений; так могут быть представлены лишь отдельные этапы процесса. Разбиение на этапы производят так, чтобы выбор решения начинался с некоторого узла решений, от которого исходят одна или несколько ветвей, пред-



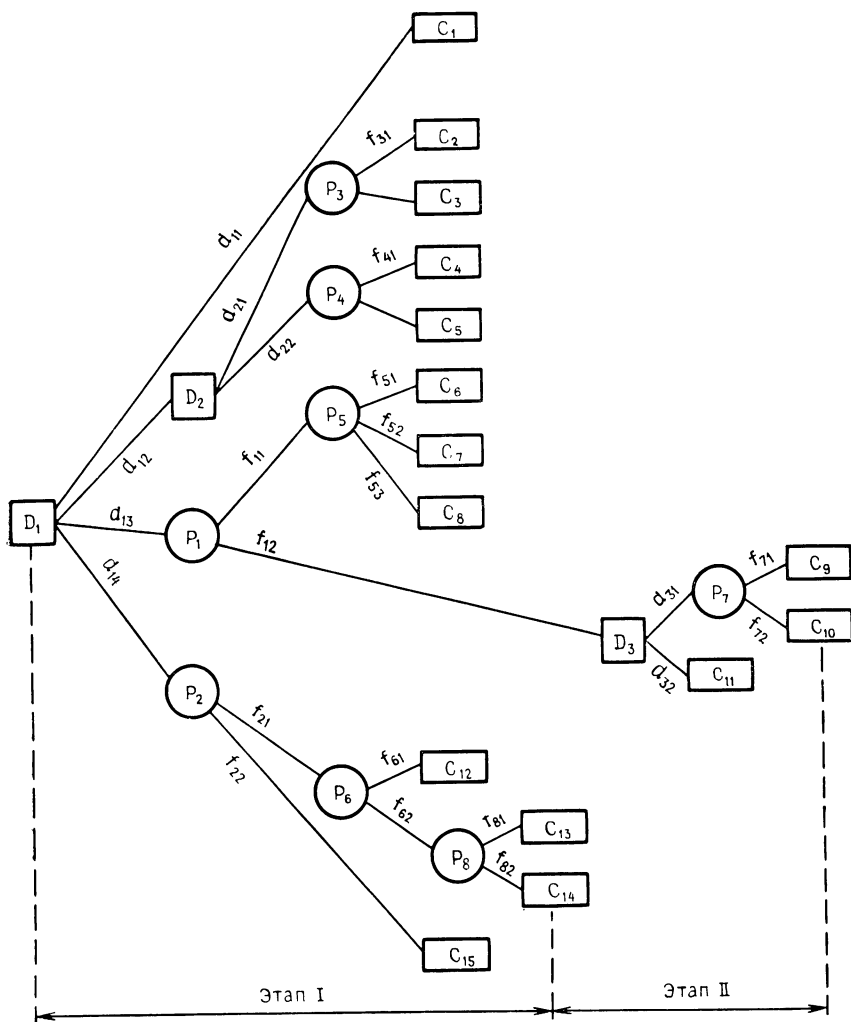


Рис. 9.5. Дерево решений с различными типами узлов на этапах I и II.

ставляющих варианты решений. Далее следуют узлы событий и на конце — «листья», представляющие конечные состояния с указанием значений соответствующих выходных параметров. Если же за узлами событий следует опять узел решений с соответствующими действиями, тогда это и все последующие разветвления относятся к более поздней стадии выбора решения. Таким образом можно проследить весь путь с начала до конца дерева решений.

Перевод дерева решений в последовательность матриц, соответствующих отдельным этапам процесса, производится следующим образом.

1. Маркируют все варианты решений каждого этапа. Все действия  $d_{rk}$ , которые встречаются на пути от исходного узла этапа до его конца, т. е. до появления нового решения, образуют в совокупности вариант решения  $E_i$  [например, на рис. 9.5  $(d_{12}, d_{21})$  и  $(d_{12}, d_{22})$  образуют соответственно два варианта решения первого этапа].

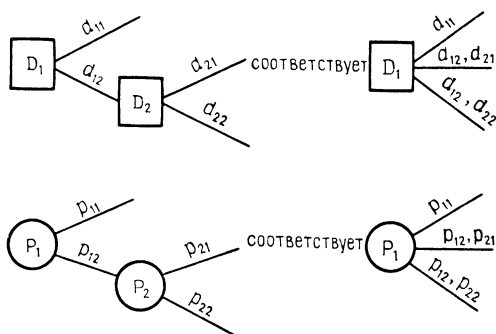


Рис. 9.6. Совокупность узлов решений и узлов событий.

2. Учитывают все случайные события отдельного этапа. Все лежащие на пути до конца каждого этапа случайные события  $f_{sl}$  характеризуют внешние состояния  $F_j$  [так, например, на рис. 9.5 как  $(f_{21}, f_{62}, f_{82})$ , так и  $f_{22}$  характеризуют внешние состояния на первом этапе, а  $f_{71}$  и  $f_{72}$  — на втором)].

3. Получаемые на каждом этапе результаты учитывают с помощью матриц решений, причем каждому пути от узла решений как исходного пункта до конца пути на рассматриваемом этапе соответствует одна матрица. Если конец этапа является одновременно концом дерева решений, то указанные там результаты  $C_k$  представляют собой явно выраженный численный элемент  $e_{ij}$  матрицы решений последнего этапа, причем результат является следствием как выбранного на рассматриваемом пути варианта  $E_i$ , так и соответствующего состояния исходных данных  $F_j$ . Если этап дерева решений является промежуточным, то вклад этого этапа в конечный результат будет зависеть также от решений на последующих этапах, так что вместо определенного значения мы должны считать результатом рассматриваемого этапа некоторую матрицу, элементы которой соответствующим образом характеризуют влияние тех или иных будущих состояний и действий.

Применяя указанную выше последовательность шагов на каждом этапе, удается расчленить многоэтапное дерево решений на ряд одноэтапных деревьев, каждому из которых соответствует одна матрица решений. В качестве примера для дерева решений на рис. 9.5 имеем:

Этап I:

Путь 1:  $d_{11} \hat{=} E_1; \emptyset \hat{=} F_1$ , откуда следует  $e_{11} = C_1$

Путь 2:  $d_{12}, d_{21} \hat{=} E_2; f_{31} \hat{=} F_2 \rightarrow e_{22} = C_2$

Путь 3:  $d_{12}, d_{21} \hat{=} E_2; f_{32} \hat{=} F_3 \rightarrow e_{23} = C_3$

Путь 4:  $d_{12}, d_{22} \hat{=} E_3; f_{41} \hat{=} F_4 \rightarrow e_{34} = C_4$

Путь 5:  $d_{12}, d_{22} \hat{=} E_3; f_{42} \hat{=} F_5 \rightarrow e_{35} = C_5$

Путь 6:  $d_{13} \hat{=} E_4; f_{11}, f_{51} \hat{=} F_6 \rightarrow e_{46} = C_6$

Путь 7:  $d_{13} \hat{=} E_4; f_{11}, f_{52} \hat{=} F_7 \rightarrow e_{47} = C_7$

Путь 8:  $d_{13} \hat{=} E_4; f_{11}, f_{53} \hat{=} F_8 \rightarrow e_{48} = C_8$

Путь 9:  $d_{13} \hat{=} E_4; f_{12} \hat{=} F_9$ . Конец этапа и вместо  $e_{49}$  следует новая матрица  $\|e\|_{11}$

Путь 10:  $d_{14} \hat{=} E_5; f_{21}, f_{66} \hat{=} F_{10} \rightarrow e_{6,10} = C_{12}$

Путь 11:  $d_{14} \hat{=} E_5; f_{21}, f_{62}, f_{81} \hat{=} F_{11} \rightarrow e_{6,11} = C_{13}$

Путь 12:  $d_{14} \hat{=} E_5; f_{21}, f_{62}, f_{82} \hat{=} F_{12} \rightarrow e_{6,12} = C_{14}$

Путь 13:  $d_{14} \hat{=} E_5; f_{22} \hat{=} F_{13} \rightarrow e_{6,13} = C_{15}$

Матрица  $\|e\|_1$  представлена в табл. 9.2.

Этап II:

Путь 1:  $d_{31} \hat{=} E_6; f_{71} \hat{=} F_{14}, F_{15}, F_{16} \rightarrow e_{11} = C_9$

Путь 2:  $d_{31} \hat{=} E_6; f_{72} \hat{=} F_{15} \rightarrow e_{12} = C_{10}$

Путь 3:  $d_{32} \hat{=} E_7; \emptyset \hat{=} F_{16} \rightarrow e_{21} = C_{11}$

Как видно из рис. 9.5 и табл. 9.2 и 9.3, для оценки и определения соответствующего отдельному пути конечного результата  $C_k$  следует идти от конца к началу, т. е. начиная в каждом

Таблица 9.2. Платежная матрица этапа выбора решений I

	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$		
$E_1$	$C_1$														
$E_2$		$C_2$	$C_3$												
$E_3$				$C_4$	$C_5$										
$E_4$						$C_6$	$C_7$	$C_8$	$\ e\ _1$						
$E_5$										$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{14}$	$C_{15}$		

Таблица 9.3. Платежная матрица  
этапа выбора решений II

	$F_{14}$	$F_{15}$	$F_{16}$
$E_6$ $E_7$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$

случае с самых высоких этапов и ветвей. Полученный на каком-либо этапе результат вводят в соседний низший этап. Таким образом, в нашем примере значения  $C_9$ ,  $C_{10}$  или  $C_{11}$  в зависимости от выбора варианта решения  $E_6$  или  $E_7$  и данного внешнего состояния  $F_{14}$ ,  $F_{15}$  или  $F_{16}$  следует подставлять в матрицу  $\|e\|_I$  как элемент  $e_{49}$ . Конечно, при использовании этого алгоритма следует охватить сразу все варианты решения и состояния исходных данных, так как возможные ошибки передаются вплоть до первого этапа. В процессе принятия решения уже нельзя, таким образом, вносить коррективы в более поздние решения на основе информации, собранной в результате реализации более ранних этапов.

Компромисс для внесения корректив может быть найден в тех случаях, когда все варианты решения и внешние состояния учитываются полностью, однако следует ожидать дополнительной информации за счет уточнения исходных вероятностей. Сначала, идя от высших к низшим этапам, нужно проделать приближенный расчет, используя наиболее подходящий в данном случае критерий, который не требует обязательно этой ожидаемой дополнительной информации. Окончательное решение следует принять, идя в обратном направлении от низших к высшим этапам, с использованием более подходящих критериев и дополнительной информации, полученной из реализации процесса.

В многоэтапных процессах принятия решения для получения наилучшего решения целесообразно применить понятие *стратегии*. Точное определение этого понятия будет дано позже, в разд. 9.4.2. Для начала здесь будет достаточно указать, что под стратегией понимают однозначный образ действий, который позволяет принимающему решение в каждый момент времени делать выбор с учетом всей информации, содержащейся в осуществленных реализациях процесса. В случаях, описываемых в соответствии с рис. 9.6 одним деревом решений, все стратегии, о которых может идти речь, формулируются правилом — следовать единичным решениям и действиям (на рис. 9.5 такие пути состоят из одного или двух членов). Если всего име-

ется  $R$  возможных стратегий и соответствующие индексу  $r$  последовательности содержат в общей сложности  $K_r$  членов  $d_{rk}$ ,  $k=1, \dots, K_r$ , то запас стратегий, которым располагает принимающий решение, можно записать множеством

$$E_{\text{ст}} = \left\{ \bigvee_{r=1}^R \left( \bigwedge_{k=1}^{K_r} d_{rk} \right) \right\}. \quad (9.1)$$

Соответственно все лежащие на пути от начала до конца дерева решений состояния исходных данных образуют стратегию внешних состояний. Если всего имеется  $S$  возможных стратегий внешних состояний и относящаяся к индексу  $s$  последовательность состояний содержит всего  $L_s$  членов  $f_{sl}$ ,  $l=1, \dots, L_s$ , то запас соответствующих стратегий  $F_{\text{ст}}$  можно описать множеством

$$F_{\text{ст}} = \left\{ \bigvee_{s=1}^S \left( \bigwedge_{l=1}^{L_s} f_{sl} \right) \right\}. \quad (9.2)$$

Таким образом, для примера на рис. 9.5 справедливо:

$$\begin{aligned} E_{\text{ст}} &= \{d_{11} \vee (d_{12} \wedge d_{21}) \vee (d_{12} \wedge d_{22}) \vee \\ &\quad \vee (d_{13} \wedge d_{31}) \vee (d_{13} \wedge d_{32}) \vee d_{14}\}, \\ F_{\text{ст}} &= \{f_{31} \vee f_{32} \vee f_{41} \vee f_{42} \vee (f_{11} \wedge f_{51}) \vee (f_{11} \wedge f_{52}) \vee \\ &\quad \vee (f_{11} \wedge f_{53}) \vee (f_{12} \wedge f_{71}) \vee (f_{12} \wedge f_{72}) \vee (f_{21} \wedge f_{61}) \vee \\ &\quad \vee (f_{21} \wedge f_{62} \wedge f_{81}) \vee (f_{21} \wedge f_{62} \wedge f_{82}) \vee f_{22}\}. \end{aligned}$$

Случай многоэтапного решения в общей форме рассмотрен в разд. 9.4.2.

Для учета всех уместных вариантов решения и состояний исходных данных на практике рекомендуется менять подходы (способ рассмотрения) и продумывать различные варианты. Иногда имеются варианты, например, в организационной плоскости, которые не касаются вариантов технической реализации. Вариант решения может также состоять в том, чтобы не принимать решения немедленно, а только позже, когда, возможно, появится дополнительная информация, или, например, в том, чтобы вообще не воздействовать на процесс, чтобы получить результаты, не содержащие последствий воздействия. Для систематизации смены подходов рекомендуется оценить варианты решения и внешние состояния, например, со следующих точек зрения:

— позволяют ли рассматриваемые подходы выстроить варианты и внешние факторы в определенном порядке? Можно ли для этого порядка подобрать количественную шкалу?

— характеризуются ли они постоянными, целочисленными или не только целочисленными величинами?

— зависят ли внешние факторы и варианты решения от времени, и если это имеет место, лежат ли они в различных временных диапазонах?

— различна ли продолжительность их действия, так что при известных условиях они действуют в ограниченной мере и через определенное время должны быть заменены новыми?

— реализуемы ли они детерминированно или речь идет о случайных величинах?

Разумеется, существенную роль могут играть и другие характеристики.

Если внешние состояния известны, а варианты необозримы, потому что проблема слишком сложна, можно пойти еще таким путем. Если между зависимыми и независимыми переменными имеется функциональная связь, т. е. возможна в некотором роде детерминистская программа оптимизации, то каждому дискретному значению независимой переменной можно поставить в соответствие значение зависимой переменной и, таким образом, определяется пространство допустимых вариантов.

На рис. 9.7 показана часть дерева решений некоторой реальной задачи. На трансформаторной подстанции крупной энергосистемы семь автотрансформаторов 380/220 кВ в определенный момент времени из-за возрастающей мощности коротких замыканий становятся неустойчивыми при коротких замыканиях. Соответствующие стандарты требуют установления параметров по максимально возможному току короткого замыкания, т. е. по ударному току короткого замыкания в месте ввода. Прежде всего напрашивается решение заменить трансформаторы. Следующая группа вариантов решения направлена на снижение мощности коротких замыканий. Для полноты систематики требуется также ветвь решений, которая предусматривала бы возможность и дальше эксплуатировать трансформаторы, мирясь с последствиями. Окажутся ли такие не лежащие в обычной области технического рассмотрения варианты оптимальными или будут, в конце концов, вообще исключены — эти обстоятельства на предварительном этапе анализа пока не имеют значения. Правда, это приводит к быстрому разрастанию дерева решений, однако было бы неразумно на начальной стадии анализа отказываться от полноты представления исходных данных и вариантов решения. Только те события и действия, которые, без сомнения, должны быть исключены, следует отбросить с самого начала. Более детальное исследование рассматриваемой задачи показывает, что максимальные токи короткого замыкания в местах ввода — очень редкое явление, поскольку они определяются неблагоприятными сочетаниями многих случайных величин, и вероятность реализации таких сочетаний очень мала. К тому же конкретный анализ показывает, что эко-

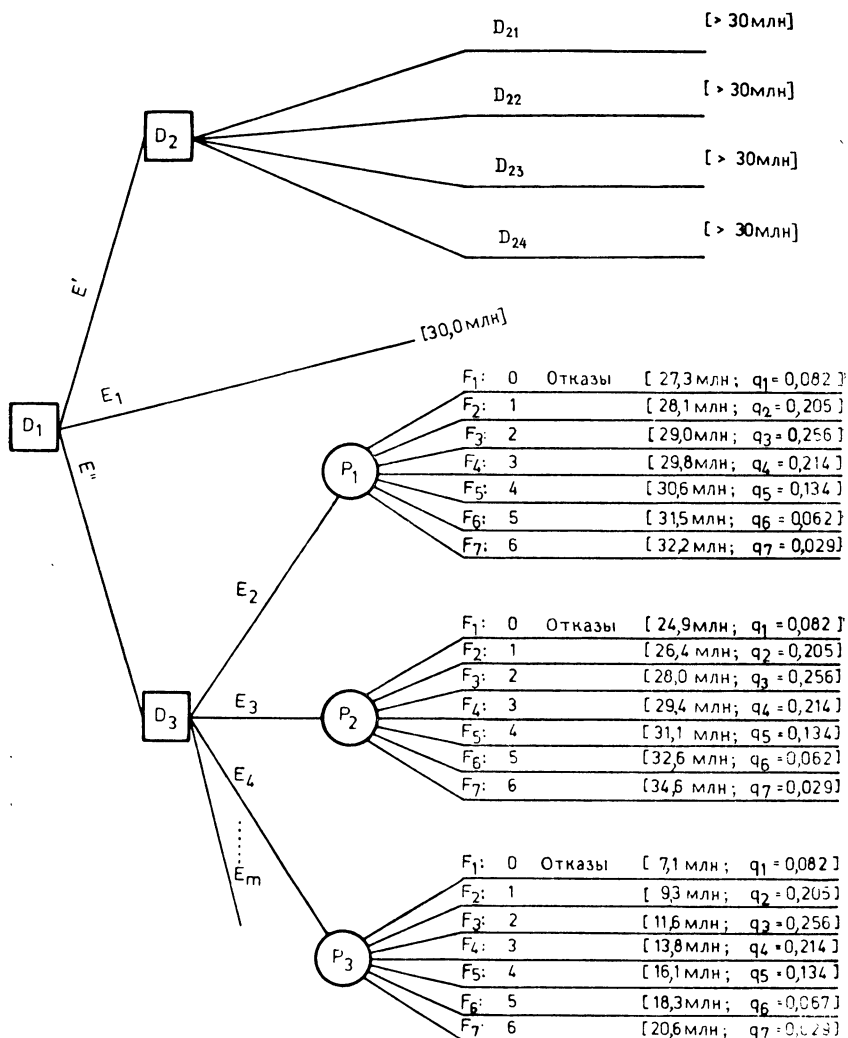


Рис. 9.7. Часть дерева решений для эксплуатации неустойчивых при коротких замыканиях трансформаторов 380/220 кВ [9].

$E_1$  — замена всех трансформаторов к 1 января первого года эксплуатации;  $E_2$  — замена всех трансформаторов к 1 января второго года;  $E_3$  — замена всех трансформаторов к 1 января третьего года;  $E_4$  — замена всех трансформаторов к 1 января четвертого года;  $E'$  — снижение мощности короткого замыкания;  $E''$  — дальнейшая эксплуатация трансформаторов;  $D_{21}$  — снижение питающей мощности;  $D_{22}$  — последующее отключение сети;  $D_{23}$  — частичное упразднение заземления нейтральной точки;  $D_{24}$  — установка устройств, ограничивающих ток короткого замыкания.

номические последствия критического короткого замыкания сравнительно невелики. Отсюда напрашивается решение продолжать эксплуатацию трансформаторов, несмотря на то что они неустойчивы при коротких замыканиях. Оценка же экономических последствий подтверждает, что все технические мероприятия по снижению мощности коротких замыканий целесообразно исключить из рассмотрения.

### 9.3. Ошибки решения

#### 9.3.1. Количественный анализ

На практике часто встречается случай, когда функция полезности  $e(y, x)$ , где  $x$  характеризует состояния исходных данных, а  $y$  — варианты решения, известна не точно, а с некоторой неопределенностью или ошибкой  $\Delta e(y, x)$ , так что принимающему решению приходится иметь дело не с самой функцией полезности  $e(y, x)$ , а с отягощенной ошибкой ее формой  $(e(y, x) + \Delta e(y, x))$ .

Возникает вопрос, какая погрешность возникает, когда оптимизацию приходится проводить, исходя из функции  $(e(y, x) + \Delta e(y, x))$  вместо функции  $e(y, x)$ . Можно, правда, предположить, что достаточно малая погрешность  $\Delta e(y, x)$  мало повлияет на максимальную эффективность и доминирующие варианты решения, но нельзя ожидать, что это общее предположение будет справедливо в одинаковой мере для всех критериев выбора и ошибок  $\Delta e(y, x)$ . Если, однако, величина  $\Delta e(y, x)$  постоянна и не зависит от  $y$  и  $x$ , т. е.  $\Delta e(y, x) = k$ , что на практике является весьма нередким частным случаем, то при использовании различных ранее обсуждавшихся критериев получаются такие же оптимальные варианты решения, как и для задачи, не отягощенной погрешностями оценок. Мы покажем это на важных примерах критерия Байеса — Лапласа, а также минимаксного и гибкого критериев. Будем в общем случае исходить из того, что переменные  $y$  и  $x$  могут изменяться как непрерывно, так и дискретно, и независимо от природы переменных нормируем диапазон их изменения в пределы  $[0, 1]$ . Сформулированное выше высказывание верно, когда при использовании критерия  $K$  оптимальное значение величины оценочной функции  $Z_K$ , которое мы хотим получить, не зависящая от  $y$  и  $x$  ошибка  $\Delta e(y, x) = k$  и соответствующая ей погрешность  $\Delta Z_K$  подчиняются уравнению

$$Z_K + \Delta Z_K = Z_K + k,$$

т. е.  $\Delta Z_K = k$ . Для минимаксного критерия с оценочной функци-



ей  $Z_{MM} = \sup_y \inf_x e(y, x)$  и  $\Delta e(y, x) = k$  непосредственно получаем

$$\begin{aligned} Z_{MM} + \Delta Z_{MM} &= \sup_y \inf_x [e(y, x) + \Delta e(y, x)] = \\ &= \sup_y \inf_x [e(y, x) + k] = \sup_y \inf_x e(y, x) + k, \text{ т. с. } \Delta Z_{MM} = k \end{aligned}$$

В случае критерия Байеса—Лапласа вместо прежней дискретной формы

$$Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} q_{ij}$$

используем для непрерывно меняющихся переменных с произвольной функцией распределения  $Q(x)$  непрерывную форму:

$$Z_{BL} = \sup_y \int_0^1 e(y, x) dQ(x).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} Z_{BL} + \Delta Z_{BL} &= \sup_y \int_0^1 [e(y, x) + k] dQ(x) = \\ &= \sup_y \int_0^1 e(y, x) dQ(x) + k \int_0^1 dQ(x), \end{aligned}$$

и поскольку  $\int_0^1 dQ(x) = 1$ , то  $\Delta Z_{BL} = k$ .

Наконец, для гибкого критерия, исходя из выражения

$$\begin{aligned} Z_r &= \sup_y \left[ V(\alpha)_y \int_0^1 e(y, x) dQ(x) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - V(\alpha)_y) \inf_x e(y, x) \right] \text{ с } \Delta e(y, x) = k, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} Z_r + \Delta Z_r &= \sup_y \left[ V(\alpha)_y \int_0^1 [e(y, x) + k] dQ(x) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - V(\alpha)_y) \{\inf_x [e(y, x) + k]\} \right] = \\ &= \sup_y \left[ V(\alpha)_y \int_0^1 e(y, x) dQ(x) + (1 - V(\alpha)_y) \inf_y e(y, x) + \right. \\ &\quad \left. + V(\alpha)_y k \int_0^1 dQ(x) + (1 - V(\alpha)_y) k \right] = Z_r + k, \end{aligned}$$

и, следовательно, снова  $\Delta Z_r = k$ .

Таким образом, подтверждается положение, что постоянная, т. е. не зависящая от внешних состояний и вариантов решения ошибка в определении функции полезности для рассмотренных нами случаев ведет к постоянной и такой же по величине по-

грешности оценочной функции, однако сами оптимальные варианты решений остаются теми же, что и в случае отсутствия ошибки.

О зависимости значения оценочной функции от погрешности функции полезности и о воздействии этой погрешности на выбор оптимального варианта нужно еще сказать следующее. Мы принимаем, что значение оценочной функции  $Z_K$  для критерия  $K$  соответствует состоянию исходных данных  $x^*$  и оптимальному варианту решения  $y^*$ , т. е. справедливо равенство  $Z_K = e(y^*, x^*) = e^*$ , и можно упростить символику обозначений, записывая функциональную зависимость  $y \rightarrow e(y, x^*)$  символом  $y \rightarrow e(y)$ . При этом функция  $y \rightarrow e(y)$  предполагается дифференцируемой, так что существует производная  $e'(y)$ , и поскольку  $Z_K = \max_y e(y) = \max_y e(y, x^*)$ , то  $e'(y^*) = 0$ . Если теперь вместо функции полезности  $e(y)$  мы располагаем отягощенной ошибкой функцией  $\tilde{e}(y) = e(y) + \Delta e(y)$  и максимальное значение последней  $\max \tilde{e}(y) = \tilde{e}(y^0)$  соответствует варианту решения  $y^0$ , то для ошибки  $\Delta Z = e(y^0) - e^*$  в случае

$$|\tilde{e}(y) - e(y)| \leq d$$

справедлива оценка

$$|\Delta Z| \leq d + \frac{1}{2} |\tilde{e}''(y)| |y^0 - y^*|^2.$$

При этом аргумент  $\tilde{y}$  во второй производной  $\tilde{e}''(y)$  имеет промежуточное значение между  $y^0$  и  $y^*$ . Коль скоро для  $y^0$  предполагается так называемый гладкий максимум и первая производная  $\tilde{e}'$  в  $y^0$  будет меняться лишь незначительно, то и значение второй производной  $\tilde{e}''(y)$  в окрестности  $y^0$  будет мало и даже при больших отклонениях оптимального варианта решения  $y^0$  от  $y^*$  ошибка  $\Delta Z$  будет определяться главным образом ошибкой функции полезности  $|\tilde{e}(y) - e(y)|$ .

### 9.3.2. Качественный анализ

До известной степени и качественный анализ позволяет принять правильное решение и оценить ошибки. Таким образом обеспечивается и более высокая достоверность последующих решений. На всех этапах процесса выбора решения следует тщательно анализировать и устранять возможные ошибки. Для этого нельзя указать какого-то единого систематического пути. На основании практики принятия решений можно, однако, указать на некоторые характерные ошибки. Если задача рассматривается небрежно или неподготовленным человеком, то из-за недостатка времени или информации может сформиро-

ваться недостаточно точное представление о задаче. Систематическое и по возможности математически обоснованное исследование задачи предотвращает ее недооценку. Кроме того, при этом реже случаются слишком поспешные или, наоборот, запоздалые решения. Очень часто наблюдаются неясности относительно цели, которую преследует решение задачи. Особенно это проявляется при множестве целей, при зависящих от времени целях и при многоэтапных решениях с изменяющимися целями. Определение цели часто недооценивают или даже им пренебрегают, поскольку полагают, что, относящееся к постановке задачи, это определение входит в круг обязанностей заказчика, а при самостоятельной формулировке задачи цель может казаться изначально полностью определенной. Тем не менее ошибочные решения часто являются следствием неточно или неполно сформулированных целей. Для мало-мальски важного технико-экономического решения всегда необходимо иметь постановку задачи, оформленную в письменном виде. К грубым ошибкам ведет предубежденность как в отношении исходных данных и вариантов решений, так и в отношении результатов. Задание неизбежно выглядит несерьезным, когда к фактически уже принятому по различным причинам решению просто ищут обоснование. При анализе информации ошибка может возникнуть из-за того, что поспешно и опрометчиво мирятся с недостатком информации вместо того, чтобы предпринять все возможные усилия для получения недостающей информации. Ошибка может возникнуть и из-за того, что установление границ диапазона изменений неизвестного параметра окажется недостаточно обоснованным. Влияние принятых распределений вероятностей и критериев выбора уже рассматривалось в соответствующих главах, и о них здесь нужно упомянуть лишь как о необходимости обеспечить достаточную полноту множества вариантов решения  $E$ . В случае очень сложных комплексных проблем ошибки могут возникать из-за неправильной постановки частных задач. При часто практикуемых коллективных решениях необходимо также считаться со взаимным влиянием множества мнений.

## 9.4. Процесс принятия решения

### 9.4.1. Одношаговые схемы принятия решения

Есть два пути возникновения технической задачи: или получают заказ на решение задачи, или на основании собственных наблюдений приходят к убеждению, что нужно искать рациональный способ достижения поставленной цели. При этом цель может быть изначально известной или может характеризовать-

ся большим числом вариантов (например, проблема развязки дорог) и для ее оценки необходима соответствующая постановка задачи. Часто нет необходимости подробно описывать саму задачу, потому что ее структура достаточно ясна и способ решения определенным образом следует из жизненного опыта. Такие рутинные решения обычно протекают по схеме: инициатива (заказ) — ознакомление с задачей — сравнение с аналогичными или похожими решениями — определение рациональных вариантов. Для сложных или новых задач с однозначными параметрами необходима точная и подробная постановка задачи. В этом случае необходимо иметь значительный объем информации, касающийся и цели задачи. Необходимо составить представительное множество рациональных вариантов решения и затем выбрать оптимальный вариант с большим или меньшим объемом обработки данных. Этот объем, когда мы имеем дело с неоднозначными параметрами, по крайней мере не меньше, а обычно намного больше, чем при однозначных параметрах. Другие особенности выявляются при наличии дополнительной информации. То же относится и к стадиям инициативы, проверки результатов и оформления решения. Процесс принятия новых решений при многозначных параметрах может быть различным в зависимости от того, применяют ли классические, производные или гибкие критерии. Соответствующие процессы представлены на рис. 9.8, 9.9 и 9.10. В то время как при использовании классических критериев внимание принимающего решение должно концентрироваться на заключительном этапе выбора, применение гибкого критерия характеризуется более важной ролью анализа информации в принятии решения. Сам акт выбора, т. е. выбор оптимального варианта решения из совокупности доминирующих, в последнем случае может быть передан устройству обработки данных. Для применения производных критериев необходимо задать некоторые дополнительные условия. Некоторые критерии сами определяют эти дополнительные параметры, тогда как такие параметры, как границы риска, доверительные факторы или весовые характеристики, должны быть заданы. При предварительном анализе (см. рис. 9.9) нужно во всяком случае найти достаточное обоснование, почему выбор решения определяется именно этим критерием. В остальном процесс поиска оптимального решения идентичен таковому при использовании классических критериев. Из всех трех схем (рис. 9.8, 9.9 и 9.10) видно, что формирование множества рациональных вариантов решения следует непосредственно из постановки задачи. Если какая-либо естественная дискретизация отсутствует, то она выбирается принимающим решение. Для этого нельзя указать какой-нибудь общий подход. Надежным является итерационный метод. Сначала

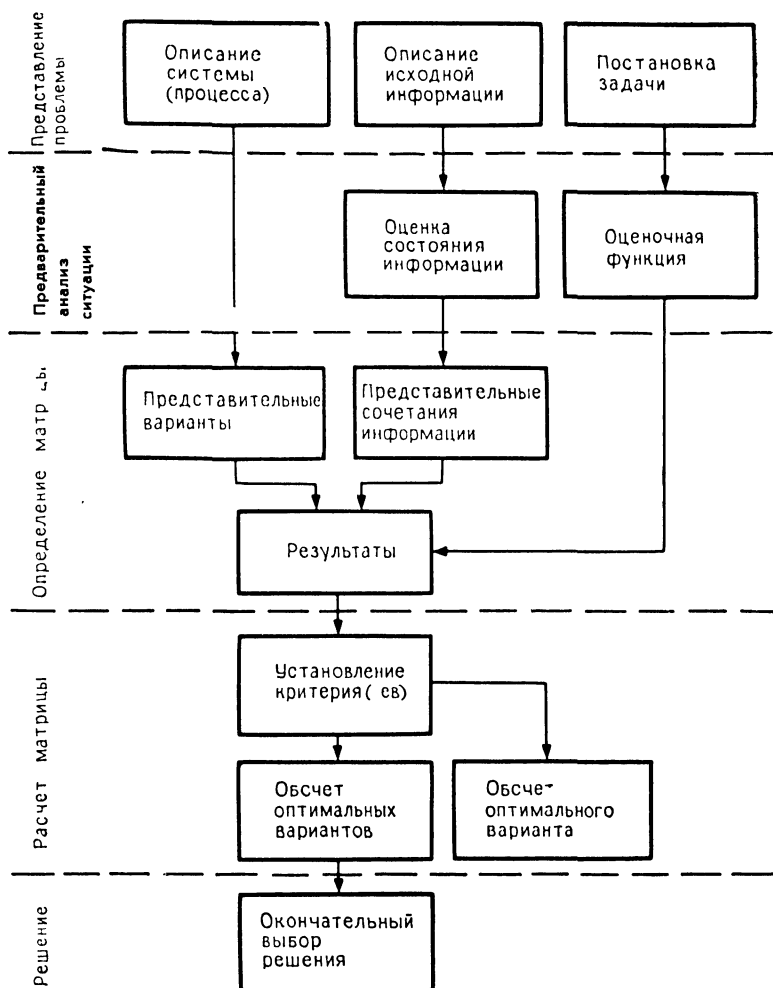


Рис. 9.8. Процесс выбора решения согласно классическим критериям.

проводят грубую дискретизацию и рассчитывают решение в первом приближении. Затем около этого приближенного решения формируют ряд более детально дискретизированных альтернатив и с большей точностью приближаются к оптимуму.

#### 9.4.2. Многошаговые решения

Многошаговый процесс принятия решений характеризуется особенностями, которые выходят за рамки описанного одношагового процесса. В общем случае объем влияющей на решение

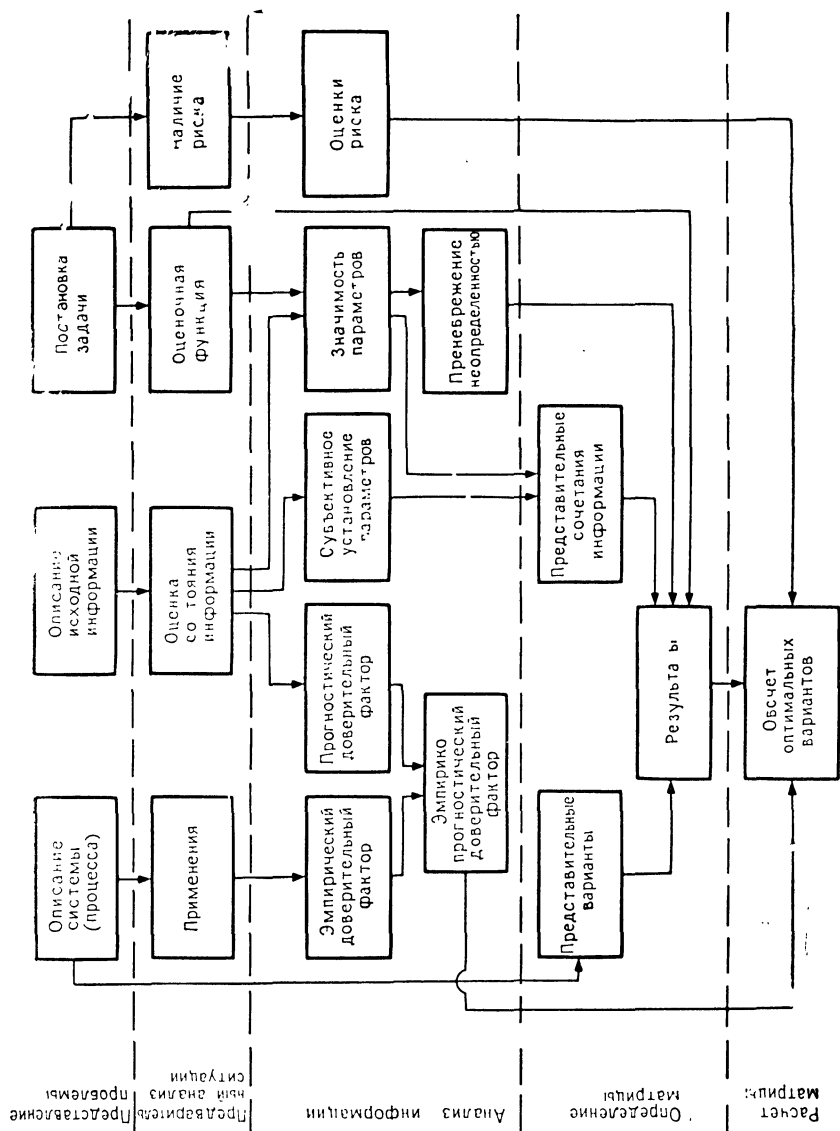


Рис. 9.9. Процесс выбора решения согласно производным критериям.

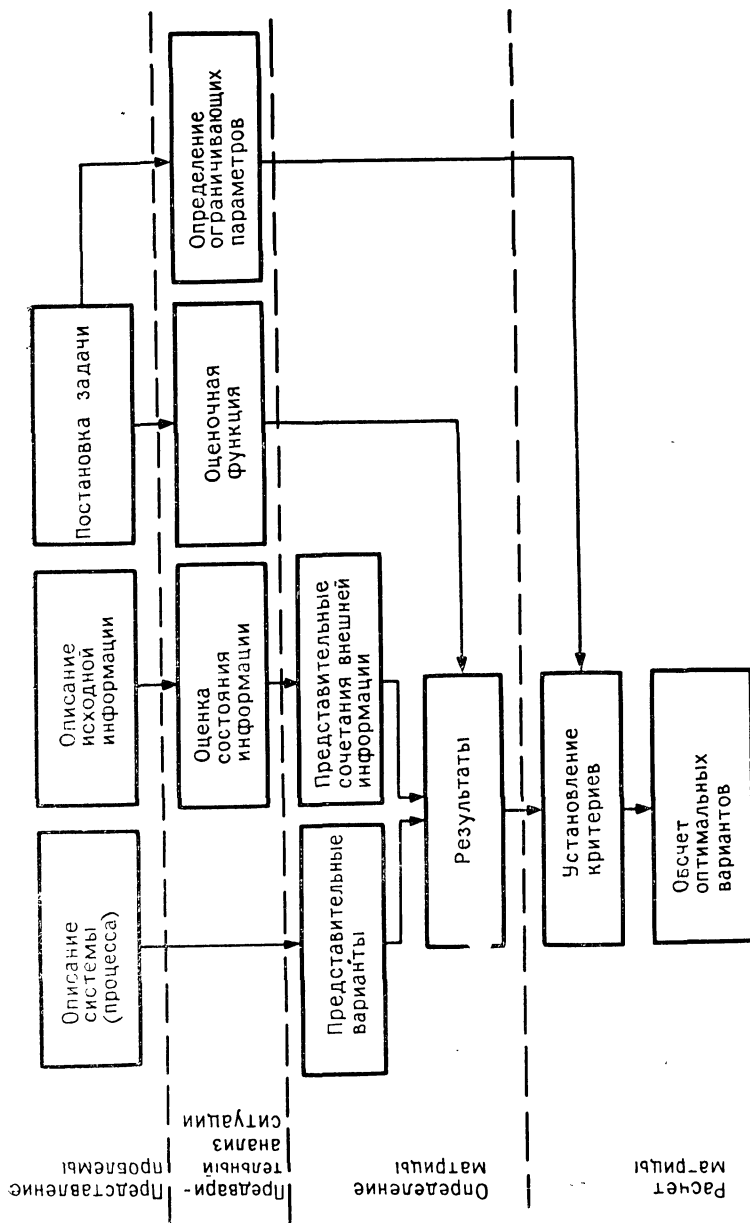


Рис. 9.10. Процесс выбора решения согласно гибкому критерию.

информации возрастает с течением времени. При принятии решений в области конструирования новая информация получается или из результатов параллельно проводимых исследований, или благодаря появлению изобретений, которые стимулируют создание нового оборудования. Всякое исследование с этой точки зрения, безусловно, лучше рассматривать в момент, как можно более близкий к его завершению и реализации. Если, например, мы имеем дело с неточно известным состоянием исходных данных  $F$ , которое в момент времени  $t$  находится в диапазоне  $\hat{x}_t \leq F = \hat{x}_t$ , то относительно имеющего место для более позднего момента  $t + \Delta t$  диапазона изменения этого состояния  $\hat{x}_{t+\Delta t} = F \leq \hat{x}_{t+\Delta t}$  в среднем справедливо неравенство  $|\hat{x}_t - \check{x}_t| > |\hat{x}_{t+\Delta t} - \check{x}_{t+\Delta t}|$ . Отсюда следует, что решение нужно принимать не ранее, чем это необходимо, чтобы обеспечить наиболее высокий уровень информированности. Беляев [12] в этой связи говорит о «принципе минимальной заблаговременности». Разумеется, решение нельзя принимать и позже, чем это необходимо. Неблагоприятные последствия в этом случае могут быть даже значительно тяжелее, чем при слишком рано принятом решении. В принципе при многошаговых процессах принятия решения имеются различные типы стратегий. Выбор стратегии определенного типа делается прежде всего исходя из соображений точности, оценки затрат, а также простоты использования некоторой в известном смысле оптимальной стратегии. Для получения общей формулировки примем, что процесс имеет  $N$  шагов, причем каждый шаг характеризуется начальным состоянием  $x_k$ , вариантом решения  $y_k$  и конечным состоянием  $x_{k+1}$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

При этом пусть на  $k$ -м шаге реализуется промежуточный результат  $e_{k+1}(x_k, y_k, x_{k+1})$ , а общий результат  $Z$   $N$ -шагового процесса аддитивен и складывается из промежуточных результатов:

$$Z = \sum_{k=0}^{N-1} e_{k+1}(x_k, y_k, x_{k+1}). \quad (9.3)$$

Под состояниями  $x_k$  будем понимать в общем случае случайные величины, которые мы будем обозначать прописными буквами  $X_k$ ,  $k=0, 1, \dots, N$ . Далее примем, что переход от некоторого наблюдаемого состояния  $x_k$  путем выбора варианта решения  $y_k$  к состоянию  $x_{k+1}$  осуществляется с соответствующей вероятностью  $P_{y_k}(X_{k+1} = x_{k+1} / X_k = x_k) = p_{k+1}(x_{k+1}/x_k, y_k)$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ . Справедливы также равенства  $p_{k+1}(y_{k+1}/x_k, y_k) \geq 0$  и  $\sum_{y_{k+1}} p_{k+1}(y_{k+1}/x_k, y_k) = 1$ , причем суммирование проводится по всем возможным состояниям на  $(k+1)$ -м шаге.



Управление процессом происходит теперь в соответствии со стратегией  $S$ . Под нею мы понимаем последовательность оптимальных функций управления («решающих функций»)  $S(d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$ , с использованием которых на  $k$ -м шаге для имеющего место состояния  $x_k$  исходных данных посредством  $d_k(x_k) = y_k$  однозначным образом определяется вариант решения  $y_k$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ . В более общем случае можно также полагать, что значения решающих функций  $d_k$  зависят от всего хода процесса до каждого соответствующего шага, т. е. от  $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, y_{k-1}, x_k$ , однако для упрощения рассмотрения ограничимся более простым и, кроме того, наиболее часто встречающимся на практике случаем, указанным выше, когда  $d_k$  зависит только от наблюдаемого состояния  $x_k$ .

При управлении процессом посредством стратегии  $S(d_0, d_1, \dots, d_{N-1})$  из-за случайности появления состояний  $X_0, X_1, \dots, X_N$  на отдельных шагах процесса получается случайный итоговый результат:

$$Z = \sum_{k=0}^{N-1} e_{k+1}(X_k, d_k(X_k), X_{k+1}). \quad (9.4)$$

В большинстве случаев мы имеем дело с определенным неслучайным начальным состоянием  $X_0 = x_0$ . В общем случае, однако, начальное состояние также случайно и реализуется с вероятностью

$$P(X_0 = x_0) = p_0(x_0).$$

Первый вариант установления оптимальной стратегии основывается на применении так называемых OL-стратегий (OL — *англ.* open loop — разомкнутый контур). Здесь в качестве стратегий используют просто определенную числовую последовательность  $S = (y_0, y_0, \dots, y_{N-1})$  и вычисляют затем среднее значение

$$M_S Z = \sum_{q=1}^{N-1} M_S e_{k+1}(X_k, y_k, X_{k+1}). \quad (9.5)$$

При расчете по формуле (9.5) мы исходим из справедливого для всех  $k=1, \dots, N$  соотношения

$$\begin{aligned} P_S(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \\ = p_0(x_0) p_1(x_1/y_0, x_0) p_2(x_2/y_1, x_1) \dots \\ \dots p_k(x_k/y_{k-1}, x_{k-1}), \end{aligned} \quad (9.6)$$

причем  $S(y_0, y_1, \dots, y_k, \dots, y_{N-1})$  — применяемая OL-стратегия.

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 P(X_{k+1}=x_{k+1}/X_k=x_k) &= \sum_{x_0} \sum_{x_1} \dots \\
 &\dots \sum_{x_{k-1}} p_0(x_0) p_1(x_1/y_0, x_0) \dots \\
 &\dots p_{k-1}(x_{k-1}/y_{k-2}, x_{k-1}) p_k(x_k/y_{k-1}, x_{k-1}) p_{k+1}(x_{k+1}, y_k, x_k).
 \end{aligned}
 \tag{9.7}$$

Суммирование здесь нужно производить по всем состояниям на данном шаге. Для слагаемых в (9.5) получаем

$$\begin{aligned}
 &M_{S^*} e_{k+1}(X_k, y_k, X_{k+1}) = \\
 &= \sum_{x_k} \sum_{x_{k+1}} e_{k+1}(x_k, y_k, x_{k+1}) P(X_{k+1}=x_{k+1}/X_k= \\
 &= x_k) = \sum_{x_0} \sum_{x_1} \dots \sum_{x_k} \sum_{x_{k+1}} e_{k+1}(x_k, y_k, \\
 &x_{k+1}) p_0(x_0) p_1(x_1/y_0, x_0) \dots \\
 &\dots p_k(x_k/y_{k-1}, x_{k-1}) p_{k+1}(x_{k+1}/y_k, x_k),
 \end{aligned}
 \tag{9.8}$$

откуда путем сложения по индексу  $k$  от 0 до  $N-1$  согласно (9.4) получается значение для  $M_S Z$  при  $S = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ . Максимизация при управлении по принципу OL-стратегии состоит теперь в том, чтобы определить стратегию  $S^*$ , для которой (9.5) (и, следовательно, средний общий результат) оказывается максимальным:

$$M_{S^*} Z = \max_S M_S Z. \tag{9.9}$$

Такая оптимальная стратегия  $S^* = (y_0^*, y_1^*, \dots, y_{N-1}^*)$  имеет то важное для практики свойство, что локально-оптимальные варианты решения  $y_0^*, y_1^*, \dots, y_{N-1}^*$  определяются с самого начала. Случайные состояния исходных данных, выявляющиеся в процессе реализации выбора, при последующем определении переменных решения не учитываются независимо от того, возможен такой учет или нет, либо им сознательно пренебрегают.

На другом полюсе возможных оптимальных стратегий лежат CL-стратегии (*англ.* closed loop — замкнутый контур), называемые также FB-стратегиями (*англ.* feed back — обратная связь). Эти стратегии учитывают каждое реализуемое в ходе процесса состояние для установления последующих оптимальных решений.<sup>1)</sup> Расчет самой стратегии, а также максимально достижимый средний результат получаются за счет использования обратной связи при стохастической динамической оптимизации. Снова исходят из того, что процесс имеет конечное чис-

<sup>1)</sup> Нередко только что описанные OL-стратегии называют также статическими, а CL-стратегии — последовательными. — Прим. перев.

ло  $N$  шагов и на  $k$ -м шаге имеется конечное число состояний  $x_k$ , которым соответствует также конечное число возможных решений  $y_k$ . Индекс, относящийся к состояниям, принимает значения в диапазоне  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , а относящийся к решениям — в диапазоне  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . В дальнейшем как для событий на этапе  $e_{k+1}(x_k, y_k, x_{k+1})$ , так и для функций перехода  $p_{k+1}(x_{k+1}/y_k, x_k)$  справедливы те же сформулированные выше предположения. Максимизируемой итоговой величиной, как в (9.5), снова является  $M_S Z$ , с тем отличием, что теперь вместо OL-стратегий применяются обладающие наибольшей приспособляемостью CL-стратегии. Эти последние определяются по алгоритму стохастической динамической оптимизации следующим образом.

**Шаг  $k = N-1$ .** Если к моменту  $N-1$  наступает состояние  $x_{N-1}$ , то оптимальный средний итоговый результат  $v^*_{N-1}(x_{N-1})$ , т. е. оптимальный средний результат на последнем шаге при оптимальном варианте решения  $y^*_{N-1} = \sigma^*_{N-1}(x_{N-1})$  выражается формулой:

$$\begin{aligned} v^*_{N-1}(x_{N-1}) &= \max_{y_{N-1}} \sum_{x_N} p_N(x_N/y_{N-1}, x_{N-1}) e_N(x_{N-1}, y_{N-1}, x_N) = \\ &= \sum_{x_N} p_N(x_N/y^*_{N-1}, x_{N-1}) e_N(x_{N-1}, y^*_{N-1}, x_N). \end{aligned} \quad (9.10)$$

**Шаги  $k=0, 1, \dots, N-2$ .** Если к моменту  $k$  наступает состояние  $x_k$ , то оптимальный средний итоговый результат  $v^*_k(x_k)$ , т. е. оптимальный средний результат на шаге  $k$  при оптимальном варианте решения  $y^*_k = \delta^*_k(x_k)$ , выражается формулой

$$\begin{aligned} v^*_k(x) &= \max_{y_k} \left\{ \sum_{x_{k+1}} p_{k+1}(x_{k+1}/y_k, x_k) [e_{k+1}(x_k, y_k, x_{k+1}) + \right. \\ &\quad \left. + v^*_{k+1}(x_{k+1})] \right\} = \sum_{x_{k+1}} p_{k+1}(x_{k+1}/y^*_k, x_k) \times \\ &\quad \times [e_{k+1}(x_k, y^*_k, x_{k+1}) + v^*_{k+1}(x_{k+1})]. \end{aligned} \quad (9.11)$$

На шаге  $k=0$  должно быть также реализовано начальное состояние  $x_0$  с начальным распределением  $p_0$ .

Принцип обратной связи в соотношениях (9.10) и (9.11) находит выражение в том, что для расчета оптимальной приведенной функции затрат  $v_k^*$  на шаге  $k$  необходимы заранее определенные оптимальные приведенные функции затрат  $v^*_{k+1}$  по всем состояниям  $x_{k+1}$   $(k+1)$ -го шага. Этот расчет в обратном направлении обеспечивает, таким образом, определение для каждого шага оптимальной функции затрат  $v_k^*$ , так что, собственно, в процессе управления, т. е. при расчете в прямом направлении каждому достигаемому состоянию  $x_k$  ставится в соответствие имеющийся оптимальный вариант решения  $v_k^*(x_k) =$

$= y_k$ . Средний оптимальный итоговый результат при оптимальной стратегии  $S^* = (v_0^*, \dots, v_{N-1}^*)$  выражается формулой

$$M_{S^*}Z = \sum_{x_0} p_0(x_0) v_0^*(x_0). \quad (9.12)$$

Различие оптимально достижимых средних итоговых величин  $M_{S^*}Z$  в классе OL-стратегий, с одной стороны, и в классе CL-стратегий, с другой, обычно весьма значительно; при этом CL-стратегии дают существенно более высокие результаты, правда, ценой и существенно более высоких затрат. Промежуточное положение занимают так называемые OLFB-стратегии. Их принцип состоит в том, чтобы на каждом шаге  $k=0, 1, \dots, N-1$ , исходя из реализованного состояния  $x_k$ , рассчитать оптимальный способ управления для оставшегося времени, руководствуясь OL-стратегией  $S_k(OL) = (\delta^{(k)}_k, \delta^{(k)}_{k+1}, \dots, \delta^{(k)}_{N-1})$  и только потом принять решение для следующего шага  $\delta^{(k)}_k(x_k)$ , благодаря чему процесс на следующем своем шаге приводит к новому состоянию  $x_{k+1}$ . Этот образ действий повторяют, причем на каждом шаге рассчитывают оптимальную OL-стратегию и только в соответствии с ней принимают следующее решение. Достижимые с помощью OLFB-стратегии оптимальные результаты оказываются значительно более высокими, чем при использовании OL-стратегии, и довольно близкими к результатам, обеспечиваемым CL-стратегией. В особом случае, когда все подлежащие учету состояния исходных данных не случайны, а характеризуются единственным определенным значением  $x_k$  на каждом шаге  $k=0, 1, \dots, N$ , это приводит к тому, что вероятности перехода вырождаются в «одноточечные» распределения, т. е.  $p_{k+1}(x_{k+1}/y_k, x_k) = 1$ , независимо от вариантов решения  $y_k$ , и все типы стратегий становятся равноценными — нет никакой разницы, следовать ли OL- или FB-стратегии.

### 9.5. Дискретизация и комбинирование внешних состояний

Пусть некоторый параметр внешнего состояния  $x$  влияет на свойства системы или процесса и по условиям задачи ограничен пределами  $x \in [\hat{x}, \check{x}]$ . Из этого интервала следует выбрать представительные значения  $x_j, j=1, \dots, n$  так, чтобы решаемая задача описывалась достаточно точно, но чтобы  $n$  в интересах упрощения расчетов было как можно меньше. Эти два требования явно противоречивы. Предельно простыми расчеты становятся, когда весь интервал представляется единственным значением  $x = x_1$ , что соответствует детерминированной оптимизации. Аналогично можно говорить о квазидетерминированных

оптимизационных расчетах в случаях, когда представительные значения переменных из интервала  $x \in [\check{x}, \hat{x}]$  не рассматриваются как неизвестные (неважно, на каком основании). Например, использование неопределенных величин часто не предусмотрено нормами, или же затраты, которые мы можем себе позволить, предопределяют выбор представительных значений. Задание параметров в этом случае осуществляется однозначно и не является случайным. Обыкновенно используют среднее  $\bar{x} = \frac{1}{2}(\check{x} + \hat{x})$ , а также крайние  $\check{x}$  и  $\hat{x}$  значения. Если различные возможные состояния параметра представляют многими значениями  $x_l, l=1, \dots, n$ , то целесообразно исходить из равномерного деления диапазона изменения параметра, а в качестве представительных значений выбирают середины интервалов (рис. 9.11). Непосредственное влияние предельных значений  $\check{x}_i$  и  $\hat{x}_i$  проявляется тогда только с ростом  $n$ .

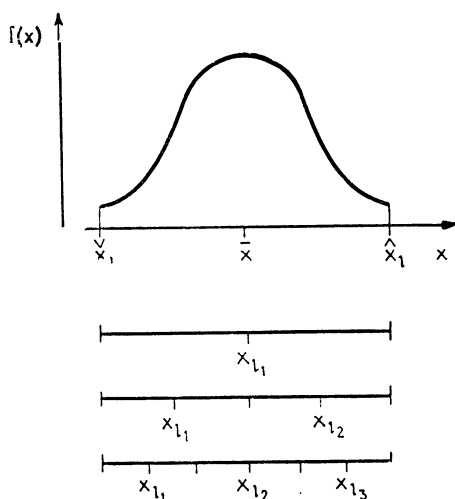


Рис. 9.11. Выбор дискретных реализаций.

Желаемая формулировка задачи получается из комбинации выбранных представительных значений, которые должны адекватно характеризовать анализируемый параметр внешнего состояния.

Кроме снижения затрат на обработку, имеются и другие основания, которые заставляют делать число выбранных представительных значений как можно меньше. Исследователь стремится из осторожности сделать диапазон столь большим, чтобы гарантированно охватить все реализации анализируемого параметра внешнего состояния. Однако краевые области интер-

валов, по всей вероятности, содержат меньше представительных значений, чем центральные. Ясно, что параметр будет оценен тем лучше, чем больше число  $n_i$  выбранных реализаций.

### 9.5.1. Разделение общего числа представительных значений по параметрам внешнего состояния

Чем больше общее число  $L$  параметров исходной информации, которые приходится учитывать и комбинировать, тем больше возрастают, естественно, и расходы, а число  $N$  всех комбинаций, в соответствии с формулой (6.1), составляет

$$N = \prod_{i=1}^L n_i,$$

где  $n_i$  — число состояний  $i$ -го параметра исходных данных. Поскольку число  $N$  принимаемых в расчет внешних состояний для многих ситуаций принятия решения предопределяется затратами на обработку, из множества всех возможных следует выбрать такие сочетания, которые наилучшим образом характеризовали бы состояние исходных данных и его изменения.

Этот отбор должен, насколько возможно, удовлетворять следующим требованиям: 1) число  $n_i$  значений параметра  $x_i$  должно соответствовать его влиянию на результат; 2) сочетания значений параметра  $x_i$ , которые оказывают одинаковое или сходное влияние на результат, не должны быть представлены в  $N$  состояниях многократно; 3) отбор должен быть в максимальной степени независимым от субъективного отношения исследователя; 4) те из выбранных сочетаний, которые по характеру решаемой задачи маловероятны, должны быть исключены.

Хотя субъективное влияние исследователя часто очень велико, сам по себе субъективный отбор широко укоренился в практике и достаточно надежен. Все требования, кроме третьего, могут быть в достаточной мере рационально выполнены при субъективном отборе. В работе [12] предложено три формализованных метода, которые, правда, трудоемки, однако они лишь в очень незначительной степени связаны с субъективными факторами.

Для множества значений параметров  $x_i$ ,  $i=1, \dots, L$ , рассматривается параллелепипед или другая соответствующая  $L$ -мерная область. В первом методе в эту область вносятся  $N$  сфер одинакового и максимально возможного диаметра. Центры сфер определяют, например на границе параллелепипеда, подлежащие выбору реализации  $x_{ij}$  и одновременно сочетания исходных данных. Этот метод применим только для небольшого числа неопределенных параметров, примерно до

$L=10$ . Кроме того, для этой задачи еще не существует общего решения.

По второму методу внутри выбранной области располагают равномерную сетку. На этой сетке выбирают заданное число узловых точек таким образом, чтобы расстояние их друг от друга было максимальным. Для отбора применяют теорию линейных кодов [12].

Третий метод формального отбора основан на использовании метода Монте-Карло и метода классификации. По заданным каким-либо образом распределениям  $x_i$  определяют статистически большое число точек в области неопределенности параметра  $x_i$ . Полученное множество точек разделяют на  $N$  групп. Групповые «центры» выбирают при этом так, чтобы средне-квадратическое расстояние между точками в группе было минимальным, а расстояния между центрами — максимальным.

Отметим, что Беляев, автор работы [12], отдает предпочтение второму методу. Эти три формализованных метода располагают представительные значения  $x_i$  равномерно, что противоречит первому требованию отбора. Если для более значимых вариантов желательно более детально задать параметры, то следует действовать, как указано в работе [20].

Число групп  $NW_i$  некоторого параметра полагают пропорциональным его значимости  $B_i$ :

$$NW_i = \bar{P} B_i. \quad (9.13)$$

Здесь  $\bar{P}$  — коэффициент пропорциональности, который дальше точно не определяется. В соответствии с формулой (6.8) из разд. 6.2 для рассматриваемого параметра  $l_0$  справедливо равенство:

$$NW_{l_0} = \bar{P} R_{l_0} H_{l_0}. \quad (9.14)$$

Однако энтропия  $H_{l_0}$  сама зависит от числа групп. Чтобы представить эту зависимость, функции распределения следует ограничить конечной областью, поскольку в противном случае число групп независимо от ширины интервала  $\Delta_i$  становится бесконечно большим.

Пусть все распределения вероятностей сосредоточены на конечных областях шириной  $b$  и пусть ширина интервала группы для всех параметров постоянна, одинакова и равна  $\Delta$ , так что

$$b = \Delta NW. \quad (9.15)$$

Определение ширины  $b$  получается из предположения о нормальном распределении. Если обрезать это распределение на границах  $3\sigma$  с обеих сторон, то в этих границах будет заключено 99,73 % всех возможных вероятностных событий. Логично и

в отношении всех рассматриваемых нами распределений принять для  $b$  область внутри границ  $\pm 3\sigma$ . Для трех важных типов распределений это дает следующие результаты.

а) Нормальное распределение:

$$b_n = 6\sigma, \quad (9.16)$$

$$H_n = \ln(2\sqrt{2\pi e}NW/6), \quad (9.17)$$

где  $\sigma$  — параметр нормального распределения.

б) Распределение Вейбулла:

$$b = \sqrt[5]{5,9145}/\eta, \quad (9.18)$$

$$H_B = \ln \frac{eNW}{\delta \sqrt[5]{5,9145}} + \frac{\delta-1}{\delta} \varepsilon, \quad (9.19)$$

где  $\eta$  — масштабный параметр распределения,  $\delta$  — параметр формы распределения,  $\varepsilon = 0,5772$  — константа Эйлера.

в) Логарифмически-нормальное распределение:

$$b_{л.н} = e^{2,782\sigma + \mu}, \quad (9.20)$$

$$H_{л.н} = \ln NW \sigma \sqrt{2\pi e} - 2,782\sigma, \quad (9.21)$$

где  $\sigma, \mu$  — параметры распределения.

Энтропию можно теперь представить следующим образом:

$$H = \ln NW + h_v, \quad (9.22)$$

откуда  $h_v = H - \ln NW$ . Величина  $h_v$  представляет не зависящую от числа групп часть энтропии — так называемую главную составляющую (см. разд. 6.2), называемую также *дифференциальной энтропией*.

Дифференциальная энтропия для приведенных выше распределений равна:

$$h_n = H_n - \ln NW = \ln \frac{\sqrt{2\pi e}}{6} = -0,3728, \quad (9.23)$$

$$h_B = H_B - \ln NW = \ln \frac{e}{\delta \sqrt[5]{5,9145}} + \frac{\delta-1}{\delta} \varepsilon, \quad (9.24)$$

$$h_{л.н} = H_{л.н} - \ln NW = 1,418 + \ln \sigma - 2,782\sigma. \quad (9.25)$$

Для равномерного распределения:

$$h_{\text{равн}} = 0. \quad (9.26)$$

В табл. 9.4 представлена зависимость дифференциальной энтропии вейбулловского и логарифмически-нормального распределений от некоторых параметров распределения; указаны



Таблица 9.4. Дифференциальная энтропия вейбулловского и логарифмически-нормального распределений

Распределение Вейбулла			Логарифмически-нормальное распределение	
$\delta$	$h_{\text{в}}$	Частные случаи	$\sigma$	$h_{\text{л.н}}$
0,5 1	2,4389 0,7774	$=h_{\text{эксп}}$	0,1 0,5	1,1618 0,6652
2 3 3,754	0,2933 0,3063 0,3728	$=h_{\text{н}}$	1 5	1,3631 10,8816
4 10	0,5032 0,9608		10	24,0985

также частные случаи перехода к экспоненциальному и нормальному распределениям.

С помощью дифференциальной энтропии можно теперь выбрать необходимое число  $NW_{l_0}$  дискретных значений рассматриваемого параметра  $l_0 \in (1, \dots, L)$ , если  $N$  — число всех внешних состояний, которые следует учесть при решении задачи.

Нетрудно показать, что справедливо следующее уравнение:

$$NW_{l_0} = \exp \left[ \frac{N}{\bar{P}^L \prod_{i \neq l_0}^L (\ln NW_i + h_i) \prod_1^L R_i - h_{l_0}} \right], \quad (9.27)$$

где  $\bar{P}$  — коэффициент пропорциональности,  $NW_i$  — число рассматриваемых значений параметра,  $h_i$  — дифференциальная энтропия распределения параметра,  $R_i$  — релевантность параметра, 0 — индекс рассматриваемого параметра.

Это уравнение может быть использовано для определения числа групп  $NW$  итерационным методом, причем  $\bar{P}$  выбирается произвольно. Осуществляют это следующим образом:

$$\begin{aligned} NW_1 &= NW_1(NW_i^*) : i \neq 1, \\ NW_2 &= NW_2(NW_1, NW_i^*) : i \neq 1, 2 \end{aligned}$$

и так далее, заканчивая, когда

$$|NW_i^* - NW_i| = NW,$$

где  $NW$  — допустимое отклонение.

Требования к точности приближения не должны устанавливаться слишком высокими, потому что все равно каждое число должно быть округлено. При практических расчетах число групп  $NW_{l_0}$  для одного параметра  $x_{l_0}$  целесообразно задать заранее, причем в качестве базового параметра  $x_{l_0}$  имеет смысл выбрать параметр с наиболее низкой релевантностью:

$$x_{l_0} : R_{l_0} = \min_l R_l. \quad (9.28)$$

Число групп для других параметров получают теперь из (9.14) и (9.22):

$$\frac{NW_{l_0}}{\ln NW_{l_0} + h_{l_0}} \frac{R_l}{R_{l_0}} = \frac{NW_l}{\ln NW_l + h_l} \quad (9.29)$$

с  $l = 1 \dots L$ .

Из соображений возможности расчета обычно задается то максимальное число состояний исходных данных  $N_{\text{макс}}$ , которое можно обработать, так что справедливо соотношение

$$\prod_1^L NW_l = N_{\text{макс}}. \quad (9.30)$$

Варьируя шаг за шагом заданное вначале число групп  $NW_{l_0}$ , достигают этой границы, причем целесообразно на основе соотношения

$$H_{l_0} = \ln NW_{l_0} + h_{l_0} \geq 1$$

начинать с наименьшего числа

$$NW_{l_0} \geq e^{1-h_{l_0}} \quad (9.31)$$

и увеличивать это число до тех пор, пока не будет достигнуто условие (9.30).

Однако и при этих вычислениях по формулам (9.29) — (9.31) не следует требовать излишней точности, так как, безусловно, будут необходимы округления результатов.

### 9.5.2. Распределение заданного числа представительных значений по диапазону неопределенности параметра

Когда рассматривают некоторый параметр  $x$  состояния исходных данных, можно выставить еще одно требование к выбору дискретных представительных значений параметра:

— распределение дискретных значений по интервалу  $[\tilde{x}, \hat{x}]$ , в котором они заключаются, должно отвечать вероятности реализации соответствующих состояний.

Это требование может быть удовлетворено, если выбранные дискретные значения  $x_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , представляют, соответственно, такие подынтервалы  $\Delta x_i$  интервала  $[\tilde{x}, \hat{x}]$ , на которых вероятности реализации неизвестного параметра одинаковы. Площадь под соответствующей функцией плотности вероятностей  $f(x)$  в интервале  $[x, \hat{x}]$  нужно для этого разбить на  $n$  равновеликих по площади параллельных полос, расположенных перпендикулярно оси  $x$  (рис. 9.12). В результате получается в

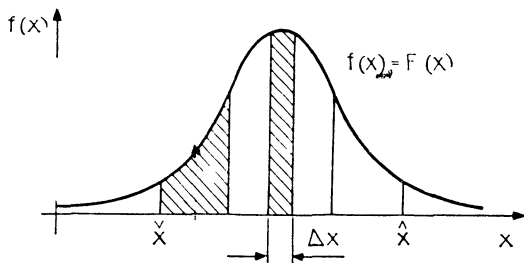


Рис. 9.12. Распределение дискретных значений неизвестного параметра по интервалу значений его возможных реализаций.

общем случае неравномерное распределение значений  $x_i$ , заключенных в подынтервалах  $\Delta x_i$  области  $[\tilde{x}, \hat{x}]$ . Если  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , т. е.  $F'(x) = f(x)$ , то при одинаковых приращениях  $\Delta F = \text{const}$  величина первого приращения равна площади полосы, начинающейся в  $\tilde{x}$  и имеющей ширину  $\Delta x = \Delta x_1$ :

$$\Delta F = F(\tilde{x} + \Delta x) - F(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x} + \Delta x} f(x) dx. \quad (9.32)$$

Разлагая  $\Delta F$  в ряд Тейлора с учетом  $F'(x) = f(x)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta F = F(\tilde{x} + \Delta x) - F(\tilde{x}) &= F(\tilde{x}) + F'(\tilde{x})\Delta x + \frac{1}{2} F''(\tilde{x})\Delta x^2 + \\ &+ \frac{1}{6} F'''(\tilde{x})\Delta x^3 + \dots - F(\tilde{x}) = \Delta x \left[ f(\tilde{x}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} f'(\tilde{x})\Delta x + \frac{1}{6} f''(\tilde{x})\Delta x^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (9.33)$$

получаем

$$\Delta x = \Delta F / \left( f(\tilde{x}) + \frac{1}{2} f'(\tilde{x})\Delta x + \frac{1}{6} f''(\tilde{x})\Delta x^2 + \dots \right). \quad (9.34)$$

откуда, ограничиваясь соответствующим числом членов ряда, стоящего в знаменателе, можно получить приближенные значе-

ния  $\Delta x$ . На практике обычно ограничиваются квадратичным членом ряда, так что

$$\Delta x \cong \Delta F \left/ \left( f(\tilde{x}) + \frac{1}{2} f'(\tilde{x}) \Delta x + \frac{1}{6} f''(\tilde{x}) \Delta x^2 \right) \right. \quad (9.35)$$

Соотношение (9.35) может быть использовано для итеративного определения  $\Delta x$ :

$$(\Delta x)_{n+1} = \Delta F \left/ \left( f(\tilde{x}) + \frac{1}{2} f'(\tilde{x}) (\Delta x)_n + \frac{1}{6} f''(\tilde{x}) (\Delta x)_n^2 \right) \right. \quad (9.36)$$

с начальным значением

$$\Delta x_0 = \Delta F / f'(\tilde{x}). \quad (9.37)$$

Условием сходимости для итеративного процесса при достаточно малом  $\Delta F$  является  $|f'(\tilde{x})| < 2|f(\tilde{x})|$ . Полагая  $\Delta x = \Delta x_1$ , получают  $\tilde{x} + \Delta x_1 = x_1$  и, продолжая процедуру, описанную для первого шага, получают  $\Delta x_2$ ,  $x_1 + \Delta x_2 = x_2$  и так далее для последующих подынтервалов. При этом между площадью  $\Delta F$  и выбранным числом  $n$  подынтервалов существует связь:

$$n \cdot \Delta F = \int_{\tilde{x}}^{\tilde{x} + \Delta x} f(x) dx. \quad (9.38)$$

Часто расчет производных, входящих в формулы (9.34), (9.35) и (9.36), затруднителен, вследствие чего используют разностные величины, получая приближенные значения:

$$f'(\tilde{x}) \approx \frac{1}{2\Delta x} [f(\tilde{x} + \Delta x) - f(\tilde{x} - \Delta x)], \quad (9.39)$$

$$f''(\tilde{x}) \approx \frac{1}{\Delta x^2} [f(\tilde{x} + \Delta x) - 2f(\tilde{x}) + f(\tilde{x} - \Delta x)], \quad (9.40)$$

что приводит, вместо (9.35), к

$$\Delta x \cong \Delta F \frac{12}{5f(\tilde{x} + \Delta x) + 8f(\tilde{x}) - f(\tilde{x} - \Delta x)}. \quad (9.41)$$

Соответствующие аппроксимации и расчеты будут тем точнее, чем меньше выбранная величина  $\Delta F$ .

На рис. 9.13 показаны меняющиеся по знаку отклонения рассчитанных значений оценочной функции  $Z_{BL}$  в зависимости от  $n$ . Такие отклонения могут в особых случаях привести к тому, что будут выбраны неоптимальные варианты. На отклонения влияют:

- функция распределения параметра внешнего состояния в области неопределенности;
- оценочная функция;
- критерий решения.

В большинстве случаев желаемая точность может быть до-

стигнута с небольшим числом представительных значений. Конечно, при использовании единственного представительного значения получается детерминированная задача. В отдельных случаях при небольшом числе представительных значений и большой значимости параметра (разд. 6.2) может потребоваться контроль возможных ошибок (рис. 9.13). При нормальном и всех других функциях распределения, особо выделяющих

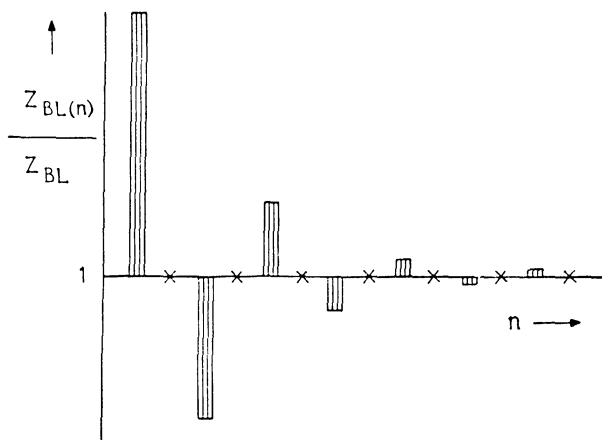


Рис. 9.13. Отклонения оценочной функции.

$Z_{BL}$  — оценочная функция;  $Z_{BL(n)}$  — вычисленные значения аппроксимации оценочной функции.

средние значения, следует предпочесть наименьшее число представительных значений параметра и эквидистантную последовательность нечетных чисел, тогда как, например, при двух представительных значениях отклонение расчетных величин может оказаться больше, чем при единственном представительном значении параметра. На рис. 9.14 это ясно видно, как и влияние критерия выбора решения. В данном случае были выбраны гибкий критерий с зависящей от  $n$  оценочной функцией и доверительный фактор  $V(\alpha)$  произвольной формы. Видно, что при больших числах  $n$  и малых значениях доверительного фактора  $V(\alpha)$  функция сохраняет монотонность, тогда как при малых числах представительных значений параметра и больших значениях доверительного фактора  $V(\alpha)$  монотонность не сохраняется. При этом малая величина доверительного фактора  $V(\alpha)$  в гибком критерии выбора решения (7.1) означает предпочтение минимаксному критерию (3.3), а большая величина  $V(\alpha)$  означает, что предпочтительным становится  $BL$ -критерий (3.6). Для функций распределения, в которых наиболее вероятные

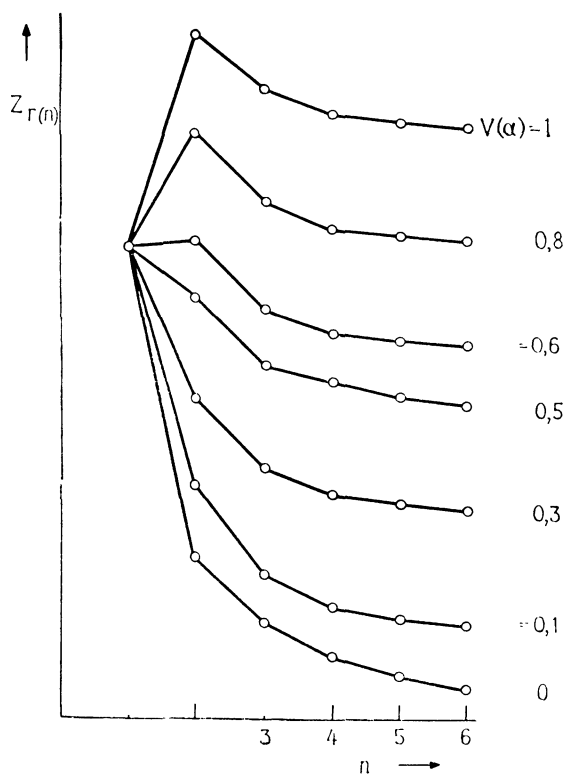


Рис. 9.14. Зависимость оценочной функции от числа интервалов дискретизации параметра  $n$  и доверительного фактора  $V(\alpha)$ .

Таблица 9.5. Число интервалов дискретизации независимых параметров  $x_1$  и  $x_2$  для примера из разд. 6.7

Шаг	$NW_1$	$NW_2$	$N$
1	3	10	30
2	4	11	44
3	5	13	65
4	6	15	90
5	7	17	119

значения не концентрируются близ середины, следует предпочесть нечетные числа. На рис. 9.13 видно также, что при такой функции распределения отклонения для четных чисел  $n$  предсказательных значений параметра (обозначенные крестиками) равны нулю.

Метод, обеспечивающий одновременное выполнение требований разд. 9.5.1 и 9.5.2, можно построить таким образом, чтобы переходить от более грубого к более тонкому разбиению на интервалы области изменения параметра. Рассматривают оценочную функцию  $e(y_i, x_{ij})$  с  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n, l=1, \dots, L$  и выбирают из  $L$  параметров такие  $x_i$ , в интервале изменения которых  $[\tilde{x}_i, \hat{x}_i]$  оценочная функция испытывает наибольшие изменения. Этот интервал затем разбивают пополам, и оба подынтервала рассматриваются таким образом, как будто они соответствуют двум различным параметрам. Затем из  $L+1$  параметров вновь отыскивают такие, которые дают на своем интервале наибольшую разницу значений оценочной функции, и делят эти интервалы. Этот процесс продолжается, пока не будет достигнут удовлетворительный уровень разбиения. Этот метод пригоден прежде всего для монотонных функций.

### 9.6. Пример расчета числа дискретизирующих шагов для оценочной функции (6.69)

В разд. 6.7 были уже рассчитаны релевантности (коэффициенты влияния) независимых параметров  $x_1$  и  $x_2$  рассмотренной там оценочной функции; результаты расчета приведены в табл. 6.7 и 6.8.

Дифференциальная энтропия  $h_1$  для равномерно распределенного параметра  $x_1$  по формуле (9.26) равна нулю, а для распределенного по нормальному закону параметра  $x_2$  — по формуле (9.23)  $h_2 = -0,3728$ .

В модели выбора решения из соображений приемлемого объема вычислений при удовлетворительной точности принято  $N_{\max} = 100$  внешних состояний. В связи с тем, что  $R_1 < R_2$ , в качестве базового выбран параметр  $x_{i_0} \geq x_1$ . По формуле (9.31) минимальное число групп (интервалов дискретизации)  $NW_1 = e^{1-0} = 2,72$ , т. е.  $NW_1 = 3$ . Из (9.29) для параметра  $x_2$  получаем  $NW_2 = 10$ .

Число интервалов для базового параметра теперь шаг за шагом увеличивают, пока не будет достигнуто  $N_{\max} = 100$ . В табл. 9.5 показаны результаты расчетов по формуле (9.29) по шагам. Четвертый шаг с  $NW_1 = 6$ ,  $NW_2 = 15$  и  $N = 90$  оказывается последним. Параметр  $x_1$  разделен на 6, а параметр  $x_2$  — на 15 интервалов.

---

## ПОЛЕЗНОСТЬ ВАРИАНТОВ РЕШЕНИЯ

---

Для того чтобы сделать разумный выбор между различными вариантами решения, необходимо оценить последствия решения. При принятии решений на практике это часто представляет большие трудности. Понятия ценности и пользы, к сожалению, не имеют универсального характера, даже когда они отражают интересы больших групп людей. Индивидуальные представления о них из-за весьма различных мотивов и взглядов сильно различаются. Это различие может быть ограничено, если рассматривать полезность решений в инженерной и хозяйственной деятельности. Однако и здесь остается возможность субъективной оценки полезности небольшими группами или отдельными лицами. Поэтому ставящий задачу должен иметь возможность оценивать решение по однозначным правилам.

Технические системы и процессы могут характеризоваться самыми различными параметрами и свойствами. Столь же многогранно могут быть описаны и последствия, к которым приводят варианты решения. Проще всего оценить результаты решения в денежном выражении. Однако на полезность в конечном счете оказывают влияние и такие плохо оцениваемые свойства, как наглядность, удобство в эксплуатации и некоторые факторы, просто не поддающиеся учету. Пользу в этом случае трудно оценить, и ее приходится описывать только рядом желаемых свойств, вытекающих из ситуации, в которой принимается решение. Отсюда следуют и различные принципы, по которым можно построить шкалу полезности.

С помощью *номинальной шкалы* делят множество последствий на подмножества, такие, как круг, овал или прямоугольник, области с гладкой или неровной границей и т. д. Такие шкалы применяются большей частью для простейших временных решений, когда не ставится цель достигнуть оптимального решения, а нужно найти лишь приемлемое. Эта шкала часто состоит только из двух градаций и применяется в тех случаях, когда по самым различным причинам затраты на получение дополнительной информации о последствиях решения и обработка этой информации не могут быть произведены.



*Шкалы упорядоченности* устанавливают между подмножествами, на которые разбивается множество результатов решения, определенные жесткие соотношения. Эти соотношения можно охарактеризовать аксиомами, при формулировке которых используется символ  $>$ : именно, соотношение  $e_1 > e_2$  означает, что  $e_1$  не хуже, чем  $e_2$ . Для пронумерованных порядковыми числами шкал упорядоченности справедливы, в частности, следующие аксиомы.

*1. Аксиома линейности или полной упорядоченности.*

О двух любых следствиях можно сделать следующие заключения:

- а)  $e_1$  не хуже, чем  $e_2$ , т. е.  $e_1 > e_2$ ;
- б)  $e_2$  не хуже, чем  $e_1$ , т. е.  $e_2 > e_1$ ;
- в)  $e_1$  и  $e_2$  равноценны, т. е.  $e_1 \wedge e_2 = e_1 > e_2 \wedge e_2 > e_1$ ;

При этом исключается, что могут быть следствия, в принципе несравнимые.

*2. Аксиома транзитивности.*

Для трех любых следствий  $e_1, e_2, e_3$  справедливо:

- а)  $(e_1 > e_2) \wedge (e_2 > e_3) \Rightarrow (e_1 > e_3)$ ,
- б)  $(e_1 \wedge e_2) \wedge (e_2 \wedge e_3) \Rightarrow (e_1 \wedge e_3)$ .

*3. Аксиома рефлексивности.*

Из  $e_1 = e_2$  всегда следует  $e_1 \wedge e_2$ .

Эти три абстрактно сформулированные аксиомы утверждают естественные представления об упорядоченности результатов.

Отсюда видно, что если при небольших различиях в полезности остается неопределенность, то с помощью этих трех аксиом утверждениями «одинаково», «больше», «меньше» можно внести необходимую упорядоченность.

Примером такой шкалы упорядоченности может служить шкала Мооса — Мартенса определения твердости методом царапання. Испытуемые материалы при этом выстраиваются в порядке, показывающем, что предыдущий материал царапает последующий и, следовательно, тверже него.

Шкалы упорядоченности достаточны для принятия решений в задачах с однозначными параметрами типа описанных в разд. 2.1, уравнение (2.1). Решения при многозначных параметрах рациональным путем приняты быть не могут, так как здесь можно лишь сказать, что один результат следует предпочесть другому, но какова степень этого предпочтения — неясно. Если же требуется, чтобы о различных полезностях можно было высказаться в категориях «одинаково», «больше» или «меньше», то это приводит к интервальным и масштабным шкалам, которые позволяют исчерпывающим образом измерить полезность. Аксиомы для таких шкал можно найти в книге [25].

Интервальные шкалы устанавливают, является ли разность в полезности  $e_1 - e_2$  одинаковой, большей или меньшей, чем разность  $e_2 - e_3$ . Соотношение между разностями полезностей сохраняется, когда разность умножают на любую константу или складывают с ней. При этом нужно, правда, сравнивать разности полезностей, а не сами полезности. Примером могут служить температурные шкалы. Повышение температуры на  $10^\circ\text{C}$  вдвое больше, чем повышение на  $5^\circ\text{C}$ , но температуры 10 и  $5^\circ\text{C}$  отличаются отнюдь не вдвое. Если требуется сравнить отношения полезности, то последние нужно измерить в масштабной шкале. Эти шкалы позволяют говорить о равенстве или различии сумм или произведений рассматриваемых величин. Шкалы длины, массы и т. д. являются масштабными.

При решении технических задач результаты должны оцениваться в упомянутых двух шкалах, дающих однозначную оценку, и по возможности — в масштабной шкале. Величины, упорядоченные на интервальной шкале, могут при необходимости вводиться как разности. Лучше всего результаты решений измерять скалярной функцией. Определяя эти функции, исходят из совокупного рассмотрения

- а) сбережения или вложения инвестиционных затрат;
- б) накоплений или затрат при эксплуатации, техническом обслуживании, текущем ремонте и пр.;
- в) прибыли или убытка в итоге работы предприятий и соответственно в национальном доходе;
- г) ущерба, имеющего место, или того, которого удалось избежать.

Далее необходимо временное преобразование значений полезности, поскольку инвестиционные операции и ущерб относятся к определенным моментам времени, тогда как факторы (б) и (в) обычно распределены во времени. Обозначая начальный момент  $t_0$ , можно написать:

$$e(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{de(t)}{dt} k^{-t/t_1} dt, \quad (10.1)$$

где  $e(t)$  — значение функции полезности в момент  $t$ ,  $t$  — время,  $[t]$  — единица измерения времени,  $T$  — продолжительность процесса,  $k$  — ажио (процент),  $k \geq 1$ . При этом принимается определенный временной ход функции  $e(t)$ . Соответственно затраты могут быть выражены для другой начальной точки или другой продолжительности  $T$ .

Если функция полезности в рассматриваемом временном диапазоне  $T$  имеет разрывы, то вместо (10.1) величина  $e(t_0)$  определяется с помощью интеграла Стильтьеса:

$$e(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} de(t) k^{-t/t_1}. \quad (10.2)$$

---

РИСК

---

## 11.1. Понятие и оценка

В литературе встречается весьма различное понимание термина «риск» и в него иногда вкладывают довольно сильно отличающиеся друг от друга содержания. Однако общим во всех этих представлениях является то, что риск включает неуверенность, произойдет ли нежелательное событие и возникнет ли неблагоприятное состояние. Такой недостаток информации роднит риск с принятием решений в условиях недетерминированных параметров. С другой стороны, проблемы риска, тем не менее, часто приходится решать, и выбор варианта решения в общем случае так или иначе связан с риском. Поэтому мы попытаемся здесь найти такое определение риска, которое в достаточной степени соответствовало бы содержанию рассматриваемых технических задач и в то же время отвечало бы общей концепции теории принятия решений.

С понятием риска часто связывается представление о возможных или грозящих событиях с катастрофическими последствиями и потерями. Отсюда следует точка зрения, что такого события следует избежать любой ценой. При ожидаемых потерях, связанных с жизнью и здоровьем, это представление выражено особенно резко, и оно ясно формулируется в соответствующих инструкциях, например по технике безопасности. Конечно, нужно четко сказать, что полностью свободной от риска техники, несмотря на самые большие затраты, не существует. Однако техническим задачам далеко не всегда сопутствуют такие отягчающие обстоятельства. Ущерб вследствие решения, принятого с учетом риска, может оказаться ничтожно малым по сравнению с затратами на то, чтобы избежать такого ущерба. Поэтому понятие риска в технической сфере следует определить несколько иначе по сравнению с обыденным. Учитывая необходимость количественных оценок, можно предложить следующую формулировку:

— величина риска определяется как произведение величины события на меру возможности его наступления.

Последствие  $A$  в принципе нежелательного события или состояния может в соответствии со своей величиной описываться и оцениваться своими специфическими параметрами. Диапазон

при этом может быть весьма широк — от экономических до этических ценностей. Мерой возможности наступления события служит вероятность  $q$  его наступления. Отсюда следует:

$$R = A \cdot q. \quad (11.1)$$

На рис. 11.1 дан обзор ситуаций с риском соответствующих нежелательных событий и приведены их параметры.

При угрозе материальным ценностям степень риска часто измеряют в денежном выражении. Если различные последствия нежелательного события одинаковы или очень велики, то для сравнения достаточно рассматривать одни соответствующие вероятности. Наряду с этим может быть угроза ценностям, которую нельзя выразить количественно, например, когда последствия события нельзя предусмотреть достаточно полно. Примером могут служить последствия выхода из строя прибора, используемого в различных областях народного хозяйства, которые поставщик оценить не может. В этом случае мерой риска остается принять вероятность превышения предела нагрузки. При риске, связанном со здоровьем, последствия могут быть частично оценены количественно в таких категориях, как простой в работе или расходы на оплату подменяющего персонала и т. п. При риске, связанном с летальным исходом (смерть), количественные оценки последствий в большинстве случаев отсутствуют. При существовании угрозы жизни люди в настоящее время почти всегда, тем не менее, работают. Особые проблемы ставят случаи, когда опасность грозит и материальным ценностям, и людям одновременно, и желательно меру такого риска сравнить с другими рисками. При этом целесообразно выразить риск в векторном виде с различными единицами по координатным осям:

$$R = A \cdot q. \quad (11.2)$$

Перемножение в правой части уравнения (11.2) нужно производить покомпонентно.

Как уже говорилось, риск может быть явно связан с факторами, не поддающимися учету. Так, эстетический вред, наносимый построенным сооружением уникальному ландшафту, или последствия выхода из строя телецентра практически невозможно оценить. Описанные свойства риска требуют следующего порядка рассмотрения проблемы (табл. 11.1).

В источниках риска разбираются путем систематического анализа. Вспомогательное средство для этого — дерево ошибок, которое строят аналогично дереву решений. Последствия задаются применительно к конкретной проблеме. Анализ информации проводят так же, как и при количественной оценке ситуаций принятия решений (гл. 6), и определяют вероятность на-

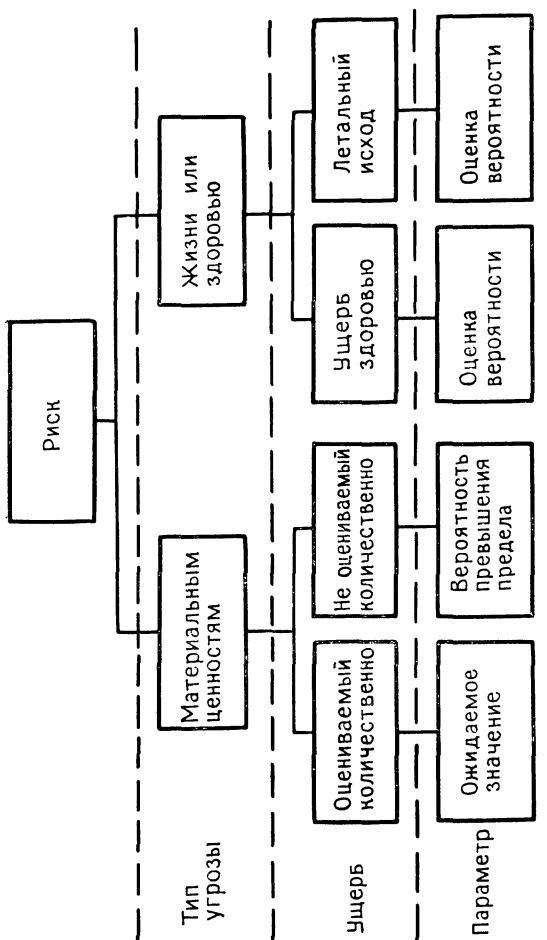


Рис. 11.1. Риск при принятии технических решений.

ступления нежелательных событий. Результатом этой стадии анализа становится выявленный и, насколько возможно, количественно описанный риск.

Заключительная оценка проста, когда имеют дело только с угрозой материальным ценностям, а возможный ущерб выражен количественно. При угрозе материальным ценностям и невозможности количественно выразить возможный ущерб нужно этот ущерб оценить приблизительно и продолжать рассмотрение, мирясь с таким недостатком информации. Поскольку нецелесообразно идти на сколь угодно большие затраты, чтобы

Таблица 11.1. Стадии рассмотрения риска

Учет	Причины Результаты Информация
Оценка	Субъективная оценка Сравнение Многоцелевая оценка
Решение	Варианты Факторы, не поддающиеся учету

устранить риск полностью, нужно оценить угрозу людям. Субъективные оценки сильно отклоняются от известных частот реализации тех или иных нежелательных событий. Значения риска субъективно привлекательной деятельности обычно занижаются. Альпинизм или горнолыжный спорт весьма показательны в этом отношении. Риск события, на которое оценивающему трудно или невозможно оказать влияние, наоборот, обычно переоценивается. Риск события катастрофического характера, как правило, тоже получает более высокую оценку. Кроме того, субъективные оценки меняются со временем. В общем и целом из-за этих некорректностей субъективные оценки не могут быть положены в основу технических решений.

Сравнение данной рискованной ситуации с возникавшими в прошлом аналогичными ситуациями дает для оценки риска более надежные исходные предпосылки. Проблема оценки этим, однако, все же не решается. В отдельных случаях, конечно, можно довольствоваться требованием, чтобы допустимый риск был заведомо ниже имевшего место в аналогичных ситуациях ранее. Но в других случаях, особенно при очень высоком уровне затрат, проблема остается нерешенной. Многократно выдвигавшимся требованиям четко ограничить допустимые вероятно-

сти реализации нежелательного события препятствуют следующие положения:

- такого рода границы должны быть независимыми от экономических затрат, но аналогичная независимость должна существовать также для угрозы безопасности людей и материальным ценностям;

- законодатель должен был бы для подобных границ принимать общее решение, учитывающее всю специфику частных случаев;

- одно лишь утверждение, что такие границы будут соблюдаться, может освободить принимающего решение от обязанности анализировать ситуацию дальше и еще больше снижать угрозу безопасности людей. При этом возможны случаи, когда ценой очень небольших затрат опасность может быть еще больше снижена, а этим пренебрегают, поскольку границы уже установлены;

- утверждение, что выдерживаются определенные границы, предполагает качественное единство данных, что на самом деле недостижимо, так как имеют место проблемы самого различного типа;

- ограничения допустимого риска зависят от времени и меняются с изменениями технических и экономических возможностей общества.

Угроза безопасности людей чаще всего состоит из многих составляющих риска, например, из основного существующего риска, риска вследствие ошибок и риска, на который идут сознательно при известных условиях. Излагаемые ниже обсуждения и результаты относятся, однако, главным образом только к основному риску.

Дальнейшую возможность количественного измерения риска дает многоцелевая оценка (гл. 12). Это относится в первую очередь к риску, связанному с угрозой жизни и материальным ущербом. При анализе и оценке риска прежде всего исключают все нерациональные варианты  $V_n$  (рис. 11.2), так как в отдельных случаях может быть получен результат в виде единственного оптимального решения. В общем случае необходимо из оставшихся рациональных вариантов  $V_e$  выбрать наилучший. Любой математический алгоритм оценки риска должен исходить из того, что твердо установлен экономический эквивалент угрозы. Этот эквивалент должен быть обоснован в том смысле, что он соответствует затратам, которые общество при данных условиях может себе позволить, чтобы предотвратить или уменьшить угрозу. Необходимо воспрепятствовать тому, чтобы, с одной стороны, ценой больших затрат был уменьшен и без того незначительный риск, а с другой — чтобы оставался большой риск, который можно было устранить с небольшими затра-

тами. Установить такой эквивалент — еще не значит добиться успеха. И при многоцелевых решениях эквивалент такого типа не удастся получить без влияния субъективных факторов. Тем не менее, эти эквиваленты делают более ясным риск при принятии решения и помогают лучше определить ответственность за сделанную оценку.

Этапы процедуры принятия решения с риском протекают по уже описанным выше правилам. Варианты, однако, дополни-

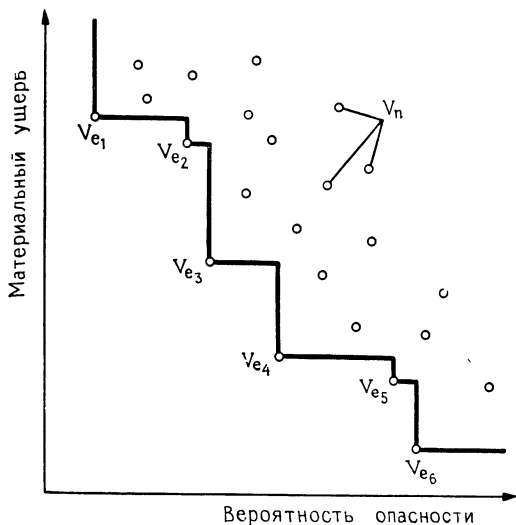


Рис. 11.2. Положение эффективных вариантов.

тельно делят на группы решений с 1) уменьшением риска, 2) минимизацией риска и 3) оптимизацией риска.

Необходимо указать, что порядок перехода от одной группы решений к другой должен строго следовать указанной последовательности. В заключение следует субъективно определить влияние не поддающихся учету факторов.

Решения, связанные с риском, всегда остаются для инженера сомнительными, так как нельзя заранее определить затраты для четкого разделения во всех случаях оправданного и неоправданного риска. Проконтролировать, был ли оправдан данный риск, удастся всегда только после наступления нежелательного события, и возможно это только при оправданных убытках.

Поэтому инженерно-техническая деятельность в принципе не может быть полностью свободна от всякого риска, а на необходимый и оправданный риск нужно сознательно идти.



## 11.2. Сравнение степеней риска

К требованиям, которые при рассмотрении риска ставятся с точки зрения общественной, прибавляются еще требования, связанные со спецификой проблемы.

Каждый человек почти всегда подвергается в различных ситуациях определенному риску. В табл. 11.2—11.4 приводятся сведения, дающие представление о таких угрозах. Из рис. 11.3 и 11.4 видно, что частота и величина риска, связанного с природными катаклизмами, обычно существенно превосходят угрозы, сопутствующие эксплуатации техники. На рис. 11.5 сопоставлены экономические последствия ущерба, наносимого природными катаклизмами и техническими катастрофами.

Таблица 11.2. Вероятность летального исхода [26]

Отрасль народного хозяйства	10 <sup>-7</sup> чел/ч
Горные работы	3
Транспорт	3
Строительство	2
Добыча нерудных полезных ископаемых	1
Эксплуатация газопроводного оборудования и гидротехнических сооружений	0,6
Металлургическая промышленность	0,6
Деревообделочные работы	0,6
Пищевая промышленность	0,6
Целлюлозно-бумажная промышленность и печать	0,5
Электротехника, точная механика и оптика	0,4
Химия	0,4
Торговля, финансы, страхование, коммунальные услуги	0,4
Текстильная и кожевенно-обувная промышленность	0,3
Здравоохранение	0,2
Средняя величина для 20,2 миллиона застрахованных	0,7

Таблица 11.3. Вероятность летального исхода [26]

Вид деятельности	10 <sup>-7</sup> чел/ч
Профессиональная деятельность	3÷0,2
Участие в движении транспорта	10÷5
Занятие домашним хозяйством и свободное время	0,5
Тяжелые заболевания	3÷0,01

Таблица 11.4. Вероятность летального исхода [27]

Условия или вид деятельности	$10^{-7}$ чел/год
Аварии автомашин	2700
Огонь и взрывы	400
Водоемы	280
Обращение с механизмами	100
Воздушное сообщение	75
Электричество	51
Молния	5,5
Общественный транспорт	0,45
Радиоактивное излучение	0,05

Поскольку границы оправданного риска трудно рационально обосновать, при решении расчетных или эксплуатационных технических задач стараются использовать сравнение с риском в аналогичных ситуациях. При этом в анализе следует принимать в расчет наиболее неблагоприятный случай. В комплексных технических проблемах не ставят никаких границ фантазии, пытаясь выявить любой крайне редкий механизм повреждений

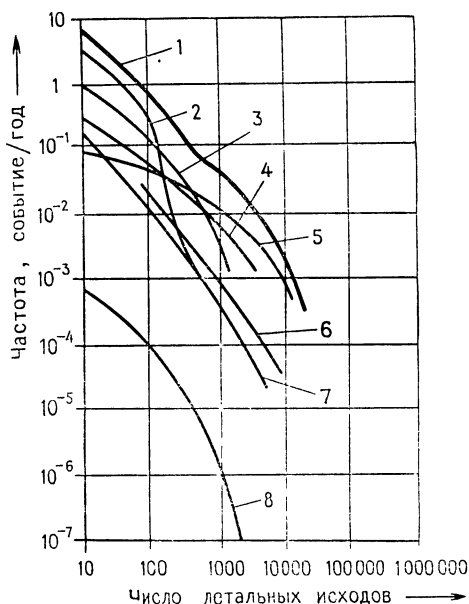


Рис. 11.3. Частота и количество связанных с техникой несчастных случаев [27].

1 — суммарная кривая; 2 — общее число аварий самолетов; 3 — пожары; 4 — взрывы; 5 — прорывы плотин; 6 — выбросы вредных химических веществ; 7 — аварии самолетов (без пассажиров); 8 — 100 атомных реакторов.

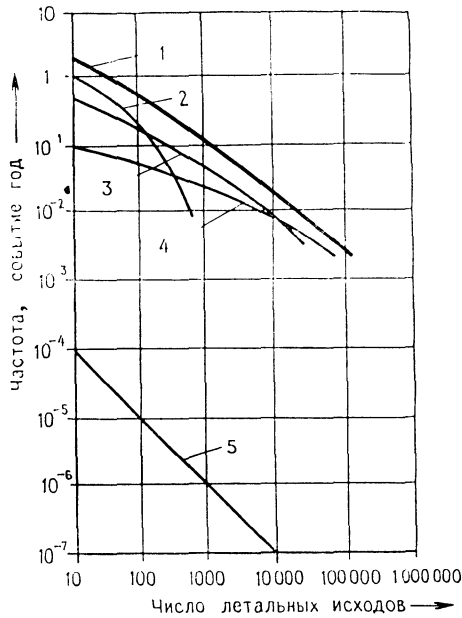


Рис. 11.4. Частота и количество природных катастрофических событий [27].  
1 — суммарная кривая; 2 — торнадо; 3 — ураганы; 4 — землетрясения; 5 — падение метеоритов.

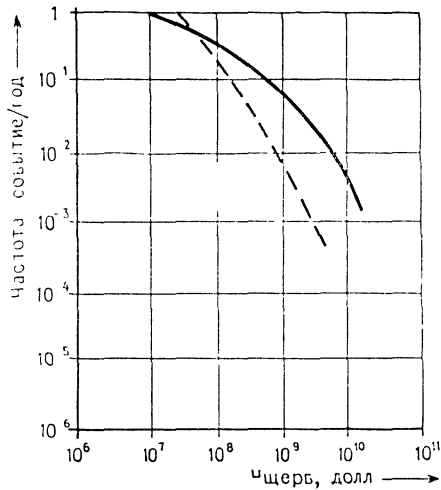


Рис. 11.5. Объем ущерба, наносимого в результате технических и природных катастрофических событий.

— природные катаклизмы; --- аварии.

и неполадок. Правда, чтобы не впадать в крайности, рисуя себе нереальные ужасные картины, необходимо постоянно опираться на здравый смысл. Установленный таким образом крайне неблагоприятный случай угрозы нужно сравнить по частоте и величине с уже принимавшимися ранее аналогичными решениями. При этом необходимо учитывать, что на частоту влияют как пространственная, так и временная протяженность рассматриваемых явлений. Кроме того, нужно учитывать продолжительность каждого события и степень стабильности исходных параметров.

Из таблиц 11.2—11.4, а также рис. 11.3 и 11.4 видно, что риск летального исхода существует на уровне  $10^{-6}$  и выше на человека в год. Таким образом, при проектировании и эксплуатации технических устройств риск на уровне  $10^{-7}$  чел/год может быть принят допустимым при следующих условиях:

- проблема риска проанализирована глубоко и всесторонне;
- анализ проведен до принятия решений и подтвержден имеющимися данными в определенном временном интервале;
- после наступления неблагоприятного события анализ и заключение о риске, полученные на основании имевшихся данных, не меняются;

- анализ показывает и результаты контроля все время подтверждают, что угроза не может быть уменьшена ценой оправданных затрат.

Принятую оценку допустимого риска и указанные условия нужно выполнять строго и рассматривать как первый шаг к количественному сравнению. При необходимости в дальнейшем, когда будет накоплено больше опыта, эта оценка может быть изменена. Исследования рекомендуют допустимый основной риск на уровне  $10^{-5}$  чел/год. Эту величину не следует, однако, воспринимать как оправданный предел; она должна служить лишь основой относительной шкалы принимаемых решений.

Сформулированные положения подтверждают также, что целесообразно задавать детерминированную границу риска. Напротив, более приемлемыми параметрами представляются вероятность  $q_v$ , отделяющая оправданный летальный риск от условно оправданного, и вероятность  $q_u$ , отделяющая условно оправданный риск, т. е. соответствующий определенным условиям, от неоправданного. К условиям, при которых летальный риск  $q_l$  в диапазоне  $q_v < q_l \leq q_u$  может быть допущен, относятся указанные выше четыре требования к анализу риска. Эти требования должен соблюдать принимающий решение, все время соотнося изменяющийся риск, например, с повышением максимально достижимой эффективности, исключением неблагоприятных ситуаций и т. п. Для летального риска принимают значения оправданного  $q_v = 10^{-8}$  и, с большим безопасным промежутком,

неоправданного  $q_u = 10^{-5}$  на человека в год; значения эти выглядят разумными.

Если речь идет исключительно о риске материальных потерь, метод сравнения при оценке риска не вызывает сомнений. В этом случае можно принимать решения, оценивая лишь эко-  
номический эффект.

### 11.3. Формальное описание риска

Количественное описание риска опирается на теоретико-вероятностный подход [28]. Путем анализа можно было бы охватить множество  $S$  всех возможных неблагоприятных событий:

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}.$$

В общем случае в определенной конкретной ситуации могут одновременно наступать многие из этих событий. Каждое мыслимое сочетание таких событий обозначим  $K$ . Множество всех возможных сочетаний  $K$  в математике называется булеаном  $S$  (множеством всех подмножеств). Целесообразно причислить к  $K$  также само множество  $S$  и пустое множество  $\emptyset$  (пустое множество соответствует отсутствию неблагоприятных событий). Определенное сочетание  $K$  является, таким образом, подмножеством неблагоприятных событий множества  $S$ :

$$K = \{s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kl}\}; \quad s_{kj} \in S, \quad j=1, \dots, l.$$

В множестве всех сочетаний можно выполнять обычные операции алгебры множеств. Если  $K_1$  и  $K_2$  — два сочетания неблагоприятных событий, то их свойства, обозначаемые соответствующими символами, суть:

*Объединение*  $K_1 \cup K_2$  образует сочетание, включающее все события, принадлежащие  $K_1$  или  $K_2$ ;

*Пересечение*  $K_1 \cap K_2$  образует сочетание, включающее все события, одновременно принадлежащие и  $K_1$ , и  $K_2$ ;

*Разность*  $K_1 \setminus K_2$  образует сочетание, включающее все события, принадлежащие  $K_1$ , но не принадлежащие  $K_2$ ;

*Дополнение*  $S \setminus K$  образует сочетание, включающее все события  $S$ , не принадлежащие  $K$ .

Пусть с некоторым рискованным вариантом решения  $E_i$  связаны элементарные сочетания неблагоприятных событий  $K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{ik_i}$ . Формула «элементарные сочетания неблагоприятных событий» означает, что никакое собственное подмножество сочетания  $K_{ij}$  не может само встречаться как сочетание неблагоприятных событий. Если еще обозначить через  $N_i$  гарантированное отсутствие неблагоприятных событий для рискован-

ного варианта решения  $E_i$ , то

$$\bar{K}_i := \{K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{ik_i}, N_i\}$$

образует полную связанную с решением  $E_i$  систему событий. Теперь положим, что каждому сочетанию неблагоприятных событий  $K_{ij}$  ( $j=1, \dots, k_i$ ), которое может реализоваться в результате принятия решения  $E_i \subset E$ , а также событию  $N_i$  можно приписать вероятности  $p_i(K_{ij})$  и, соответственно,  $p_i(N_i)$ :

$$0 \leq p_i(K_{ij}) \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{k_i} p_i(K_{ij}) + p_i(N_i) = 1.$$

Если далее каждому сочетанию  $K_{ij}$  может быть поставлено в соответствие количественно описываемое последствие  $A_{ij}$ , то величина сопутствующего решению  $E_i$  риска  $R_i$  определяется формулой

$$R_i = \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} p_i(K_{ij}). \quad (11.3)$$

Величина  $R_i$  представляет, таким образом, среднюю (ожидаемую) величину ущерба при принятии варианта решения  $E_i$ .

Иногда под риском понимают просто вероятность наступления определенного сочетания неблагоприятных событий  $S_0 \in \bar{K}_i$ . Такой подход особенно целесообразен, когда последствия  $A_{i0}$  риска для  $E_i$  и  $S_0$  не даны. Тогда при использовании функции-индикатора  $S_j \rightarrow 1_0(S_j)$ , определяемой условиями

$$1_0(S_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } S_j = S_0 \\ 0 & \text{при } S_j \neq S_0 \end{cases} \quad S_j \in K_i, \quad (11.4)$$

для  $A_{ij} := 1_0(S_j)$  в соответствии с (11.4) получаем

$$R_i = p_i(S_0). \quad (11.5)$$

Если, напротив, при принятии решения  $E_i$  все вероятности реализации сочетания неблагоприятных событий  $K_{ij} \in \bar{K}_i$  одинаковы, т. е.  $p_i(K_{ij}) =: p_i$ , то в соответствии с (11.5)

$$R_i = p_i \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij}. \quad (11.6)$$

При принятии решения  $E_i$  для определяемой связью между сочетанием неблагоприятных событий  $K_{ij}$  и последствием  $A_{ij}$  функции риска  $A_i: K_{ij} \rightarrow A_{ij}$ ,  $j=1, \dots, k_i$ , представляют особый интерес два частных случая.

Если для двух взаимоисключающих сочетаний  $K_{ij}$  и  $K_{il}$ ,  $j \neq l$ , т. е.  $K_{ij} \cap K_{il} = \emptyset$ , справедливо равенство

$$A_i(K_{ij} \cup K_{il}) = A_i(K_{ij}) + A_i(K_{il}), \quad (11.7)$$

то говорят об аддитивных *штрафных функциях* и соответственно аддитивных *функциях риска*.

В этом случае для сочетаний, которые состоят из единственного неблагоприятного события  $K_{i1} = \{s_1\}$ ,  $K_{i2} = \{s_2\}, \dots, K_{in} = \{s_n\}$ , справедливо соотношение

$$A_i(s_1 \cup s_2 \dots s_n) = A(s_1) + A(s_2) + \dots + A(s_n) \quad (11.8)$$

и

$$R_i = \sum_{s \in S} A_i(s) p_i(s). \quad (11.9)$$

Мы имеем дело с так называемой *нормальной* штрафной функцией  $K_i$  и соответственно функцией риска  $A_i$ , когда для двух взаимоисключающих сочетаний  $K_{ij}$  и  $K_{il}$ ,  $j \neq l$ , справедливо соотношение

$$\max\{A_i(K_{ij}), A_i(K_{il})\} = A_i(K_{ij} \cup K_{il}) = A_i(K_{ij}) + A_i(K_{il}). \quad (11.10)$$

Этот случай служит показательным примером аддитивной штрафной функции. Определим теперь для  $K_{ij}$ ,  $K_{il} \in \bar{K}_i$  дополнительный ущерб за счет  $K_{il}$  при  $K_{ij}$  на основании соотношения

$$A_i(K_{il} | K_{ij}) = A_i(K_{ij} \cup K_{il}) - A_i(K_{ij}). \quad (11.11)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} A_i(K_{i1} \cup K_{i2} \cup \dots \cup K_{ik_i}) &= A_i(K_{i1}) + A_i(K_{i2} | K_{i1}) + \\ &+ A_i(K_{i3} | K_{i1} \cup K_{i2}) + \dots + A_i(K_{ik_i} | K_{i1} \cup \dots \cup K_{ik_{i-1}}), \end{aligned} \quad (11.12)$$

и в случае аддитивной штрафной функции получаем простое выражение

$$A_i(K_{il} | K_{ij}) = A(K_{il}). \quad (11.13)$$

Вариант решения  $E_i \in E$  без учета возможности неблагоприятных последствий будет иметь полезность  $e_i$ . Тогда соответствующую варианту решения  $E_i$  величину

$$G_i = e_i - R_i \quad (11.14)$$

называют *суммарным эффектом решения*.

Множество рациональных вариантов решения обозначают:

$$\bar{E}^+ = \{E_i \in E : G_i > 0\}.$$

Вариант решения  $E_i^*$  называется оптимальным в случае

$$G_i^* = \max_{E_i \in E} G_i,$$

При этом в рамках конкретной практической задачи множество допустимых вариантов решения может быть дополнительно ограничено пределами риска.

## 11.4. Частные случаи

### 11.4.1. Технический риск

Установки и приборы подвергаются опасности при возрастании нагрузки. Если при этом будет превзойден предел (например, прочности), произойдет выход из строя. Риск здесь соответствует частному случаю, описываемому уравнением (11.5), при условиях:

- а) если последствия выхода из строя нельзя выразить в экономических категориях;
- б) если экономические соображения играют подчиненную роль и перевешивают не поддающиеся оценке факторы;
- в) если экономические последствия также важны, но не поддаются количественной оценке;
- г) если последствия столь велики, что без особых рассуждений нужно минимизировать возможность выхода из строя.

Технический риск характеризуется, таким образом, вероятностью превышения предела  $\hat{p}$ . Если  $X$  и  $Y$  — случайные переменные, причем  $X$  характеризует нагрузку, а  $Y$  — несущую способность, то для технического риска справедливо соотношение

$$R_T = \hat{p} = p(X > Y), \quad (11.15)$$

что в случае существования плотностей вероятности  $f_X$  и  $f_Y$  соответственно для нагрузки и несущей способности и при стохастической независимости  $X$  и  $Y$  дает

$$R_T = \hat{p} = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v) f_Y(u) du \right) dv.$$

Если, кроме того, можно описать временной ход нагрузки  $X$  и несущей способности  $Y$  плотностями вероятности  $f_X(x, t)$  и  $f_Y(y, t)$  соответственно, то получим

$$R_T^{(t)} = \hat{p}(t) = \int_{-\infty}^0 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v, t) f_Y(u, t) du \right) dv. \quad (11.16)$$

Если существует множество, например,  $n$  независимых друг от друга величин нагрузки  $X_i$  и, соответственно, несущей способности  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то справедливо соотношение  $R_T = \hat{p} = 1 - \prod_{i=1}^n p_i(Y_i < X_i)$ .



Вместе с тем значения плотностей вероятности для несущей способности и нагрузки определить трудно. В то время как в строительстве легче определить несущую способность, чем нагрузку, в электротехнике ситуация обычно обратная. При известных условиях можно облегчить задачу, предполагая наличие одноточечного распределения, исходя при этом из наиболее неблагоприятного случая и моделируя решаемую задачу путем соответствующего преобразования приведенных выше формул для случая принятия решения в условиях неопределенности.

#### 11.4.2. Техничко-экономический риск

В следующих рассуждениях мы исходим из того, что последствия при конкретных нагрузке  $x$  и несущей способности  $y$  можно описать функцией  $a: (x, y) \rightarrow a(x, y)$ . Прежде всего, казалось бы, важно рассмотреть критический случай  $y < x$ , т. е. случай, когда несущая способность ниже уровня нагрузки. Можно было бы выразить это условием  $a(x, y) = 0$  для  $y \geq x$  и однозначно оценить критический случай  $y < x$  простым утверждением, что при этом  $a(x, y) = 1$ . Однако реальные данные из практики показывают, что иногда первые признаки разрушения появляются еще до достижения нагрузкой несущей способности, и наоборот, в других случаях, при нагрузке, превышающей несущую способность, конструкция еще работает, так что ограничение функции  $(x, y) \rightarrow a(x, y)$  всего двумя значениями — 0 и 1 — может оказаться слишком грубым описанием. Определим теперь экономический риск  $R_0$  при стохастической независимости нагрузки  $X$  и несущей способности  $Y$  и данных плотностях вероятности  $f_x$  и  $f_y$  ожидаемых случайных величин  $a(X, Y)$  соотношением

$$R_0 = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} a(x, y) f_y(y) f_x(x) dy dx. \quad (11.17)$$

Для определенного данного значения  $x$  нагрузки условное математическое ожидание риска равно

$$R_0(x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} a(x, y) f_y(y) dy. \quad (11.18)$$

Если нагрузка и несущая способность описываются дискретными распределениями, а именно

	Значения	Вероятности
$X$	$x_1, \dots, x_m$	$q_1, \dots, q_m$
$Y$	$y_1, \dots, y_n$	$p_1, \dots, p_n$

а вредные последствия характеризуются величинами  $a(x_i, y_j) =$

$=: a_{ij}, i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ , то вместо (11.17) получим

$$R_s = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j. \quad (11.19)$$

Введенные математические ожидания риска можно рассматривать как элементы матрицы решений. Расчет матрицы осуществляют тогда в соответствии с гл. 3—7.

### 11.4.3. Угроза безопасности людей

Если можно в случае угрозы людям задать функцию риска, то справедливы соотношения, аналогичные формулам (11.17)—(11.19), приведенным для технико-экономического риска. В противном случае здесь, как и в случае технического риска, нужно применить в качестве меры риска вероятность угрозы. Дополнительно следует, однако, рассмотреть еще ряд связей.

Угроза при эксплуатации технических средств определяется двумя категориями влияний — представляющими угрозу событиями и попаданием в опасную зону.

Обычно представляющие угрозу события и попадание в опасную зону — явления случайные. Анализ во временной области дает (в предположении равномерных распределений) следующие выражения для вероятности наступления представляющего угрозу события:

$$p_E = T_E / T \quad (11.20)$$

и для вероятности попадания в опасную зону:

$$p_A = T_A / T. \quad (11.21)$$

Таким образом, вероятности выражаются как отношения интервалов времени. Здесь приняты следующие обозначения:  $T_E$  — суммарная продолжительность представляющего угрозу события,  $T_A$  — продолжительность пребывания в опасной зоне,  $T$  — весь рассматриваемый интервал времени.

Если представляющее угрозу событие  $E$  и пребывание в опасной зоне  $A$  независимы, то для вероятности  $P(E \cap A)$  их совместной реализации  $E \cap A$  справедлива формула

$$P(E \cap A) p_E p_A. \quad (11.22)$$

Эта формула говорит, что при данных значениях  $p_E$  и  $p_A$  в смысле, определяемом формулами (11.20) и (11.21), следует считаться с вероятностью  $p_E \cdot p_A$  совпадения опасностей, т. е. одновременного наступления представляющего угрозу события и попадания в опасную зону в рассматриваемый отрезок времени. Отсюда, однако, не следует, с какой вероятностью нужно ожидать реализации по меньшей мере одной угрозы. Поэтому

при использовании величины  $P(E \cap A)$  как вероятности угрозы возможны серьезные ошибки в интерпретации рассматриваемых ситуаций.

Коль скоро мы исходили из того, что уже в очень малом промежутке времени совпадение будет представлять опасность, имеет смысл положить в основу дальнейшего рассмотрения вероятность угрозы  $P_G$  появления по крайней мере одного совпадения в рассматриваемом интервале времени  $T$ . Для определения  $P_G$  разобьем рассматриваемый отрезок времени  $T$  в одном случае на  $n$  равновеликих интервалов продолжительностью  $l$ , а в другом — на  $N$  равновеликих интервалов продолжительностью  $L$ . Интервал  $l$  сравнительно короткий и соответствует наступлению представляющего угрозу события, а интервал  $L$  су-

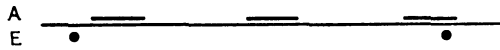


Рис. 11.6. Регулярное появление (т. е. одинаковое по продолжительности и разделенное равными промежутками времени)  $A$  ( $H=3$ ) и случайные неблагоприятные события  $E$  ( $h=2$ ).

щественно длиннее и соответствует попаданию в опасную зону. Сообразно условиям эксплуатации техники характерной величиной для  $l$  может, например, быть 1 секунда, тогда как для  $L$  речь идет о часах. Соотношение между  $L$  и  $l$  обозначим  $v: L=vl$  и будем характеризовать величинами  $h$  и, соответственно,  $H$  общее число угрожающих событий или попаданий в опасную зону. Путем комбинаторных рассуждений нетрудно получить для вероятности  $P$  несовпадения  $\bar{K}$  выражения

$$P(\bar{K}) = \frac{n-vH}{n}, \quad \frac{n-vH-1}{n-1}, \dots, \frac{n-vH-h+1}{n-h+1}, \quad (11.23)$$

и отсюда, благодаря равенству  $P(K)=P_G$ , вероятность угрозы

$$P_G = 1 - P(\bar{K}). \quad (11.24)$$

Практический интерес представляет то положение, что формулы (11.23) и (11.24) остаются справедливыми и тогда, когда интервалы попадания в опасную зону не случайны и, например, эквидистантны на интервале  $T$ , и только события в смысле их появления остаются случайными, хотя и подчиняются равномерному распределению по  $T$ . Пример такой ситуации показан на рис. 11.6, причем, как видно, имеет место и одно совпадение.

В заключение заметим, что формулы (11.23) и (11.24), в отличие от (11.22), несмотря на остающиеся постоянными величины  $p_A = HL/T$  и  $p_E = hl/T$ , зависят от  $L$  и  $l$ , т. е. когда  $L$  и  $H$ , как и  $l$  и  $h$ , варьируют таким образом, чтобы  $p_A$  и  $p_E$  каждый раз оставались постоянными, то величина вероятности, опреде-

ляемая формулой (11.22), не меняется, а величины вероятностей, определяемые формулами (11.23) и (11.24), — меняются.

На рис. 11.7 схематично показаны две ситуации с одинаковыми значениями  $p_A$  и  $p_E$ , но во втором случае наступает вдвое больше отдельных событий, каждое из которых вдвое короче по продолжительности.

Если для двух сравниваемых ситуаций справедливы соотношения  $h' = kh$  и  $l' = l/k$ , то отсюда следует  $n' = kn$  и  $v' = kv$  ( $k$  — натуральное число), и справедливо равенство  $hl/T =$

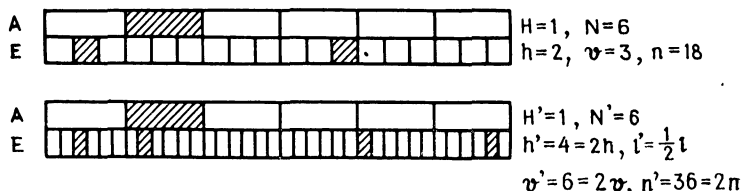


Рис. 11.7. События с одинаковой общей и различной индивидуальной продолжительностью.

$=h'l'/T = p_E$ . Для вероятности несовпадения  $P'(\bar{K})$  по (11.23) нетрудно получить неравенство:

$$P'(\bar{K}) \leq \left( \frac{n - vH}{n} \right)^k.$$

Это означает, что при неограниченном уменьшении единичного интервала для неблагоприятного события вероятность угрозы  $P_G' = 1 - P'(\bar{K})$  стремится к единице.

Бауэр [29] рассчитывает вероятность угрозы по формуле

$$p_G = 1 - (1 - p_E)^H (1 - p_A)^h. \quad (11.25)$$

Вероятности  $p_E$  и  $p_A$  получаются из (11.20) и (11.21), а  $H$  и  $h$  означают число попаданий в опасную зону и неблагоприятных событий соответственно за рассматриваемое время. При этом если речь идет о случайных величинах, нужно использовать оценки для их средних значений. В области, представляющей практический интерес, формулы (11.24) и (11.25) хорошо согласуются между собой: кроме того, в частности, при  $hl \ll T$ ,  $h > 1$  формула (11.25) удобнее для расчетов, чем (11.24). Для очень малых вероятностей  $p_E$  и  $p_A$  удовлетворительный результат дает формула

$$p_G \approx Hp_E + hp_A. \quad (11.26)$$

График рис. 11.8 позволяет определить максимальную ошибку, которую дает формула (11.26) в наиболее неблагоприятном случае  $h=1$ ,  $H=1$ . До значений вероятности угрозы менее  $10^{-2}$

ошибка не превышает 1%. Для определения  $p_G$  в более широкой области используют номограмму рис. 11.9.

Из точки на оси абсцисс, соответствующей вероятности  $p_E$  угрозы, восставляют перпендикуляр до пересечения с прямой, соответствующей числу  $N$  попаданий в опасную зону, и для точки пересечения берут отсчет I по правой вспомогательной шкале на оси ординат. Аналогичным образом для известных величин вероятности попадания в опасную зону  $p_A$  и числа угрожающих событий  $h$  получают на вспомогательной шкале

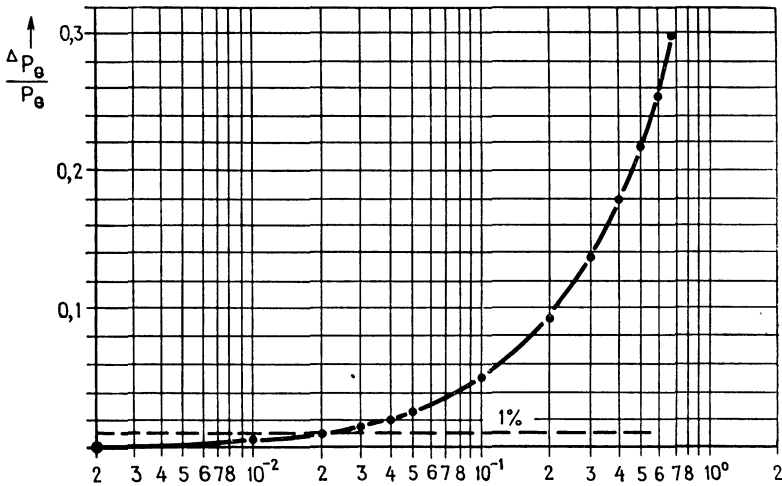


Рис. 11.8. Максимальная ошибка приближения по формуле (11.26).

отсчет II. Сложение обоих отрезков на ординате III дает связанную с неблагоприятными событиями вероятность угрозы, считываемую по левой шкале.

Дополнительно нужно указать, что формулы (11.25) и (11.26) представляют в большей или меньшей степени грубые приближения к (11.24). Так, например, случай  $p_E=0$ ,  $m=0$  приводит согласно (11.25) к парадоксальному результату  $p_G=1$ . Также для  $m=n=1$  из (11.25) следует соотношение

$$p_G = P(A \cup E),$$

тогда как опасность возможна только в случае  $A \cap E / \emptyset$ .

### 11.5. Неоднократный риск

Если риск характеризуется случайной величиной  $R$ , зависящей от случайных значений  $x$  и  $y$ , соответствующих нагрузке и несущей способности, то среднее значение  $R_0$  величины  $R$

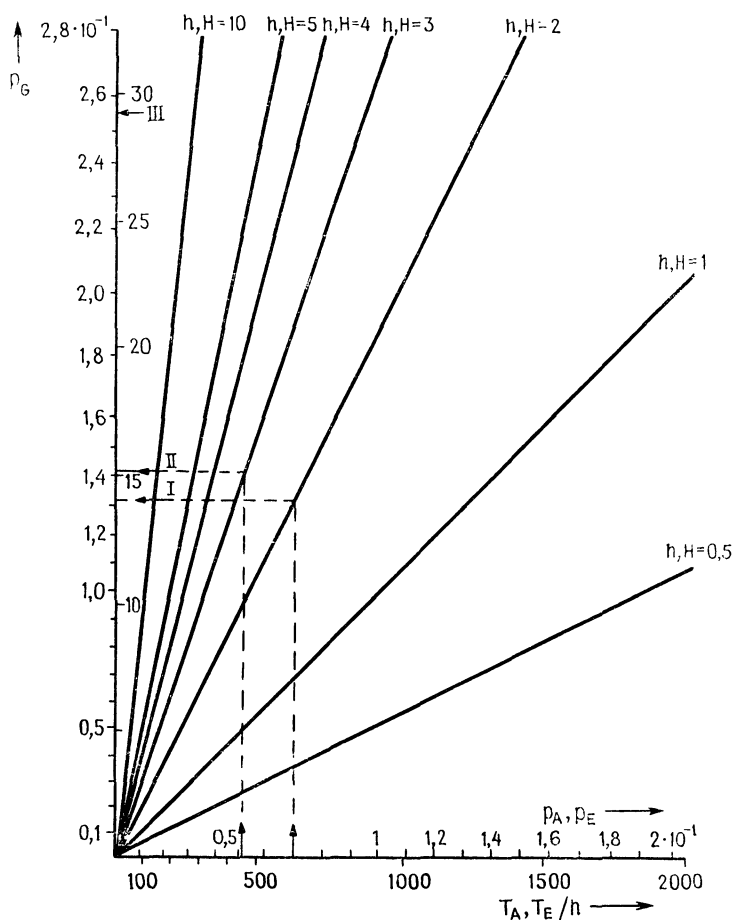


Рис. 11.9. Номограмма для определения вероятности неблагоприятных ситуаций.

(см. (11.17)) еще не полностью описывает связанную с риском ситуацию. В отдельных случаях может реализоваться более высокая величина риска. Суммарный риск в длинном ряду реализующихся  $w$  раз рискованных ситуаций оценивают средним значением

$$R(w) = \frac{1}{w} (R_1 + R_2 + \dots + R_w), \quad (11.27)$$

причем здесь  $w$  случайные величины  $R_1, R_2, \dots, R_w$  независимы и распределены так же, как  $R$ , и при неограниченно увели-

чивающемся  $w$  значение  $R(w)$  стабилизируется около  $R_0$ . При меньших значениях  $w$  для некоторой данной вероятности ошибки  $\alpha$  можно рассчитать интервал  $[\check{R}^{(\alpha)}(w), \hat{R}^{(\alpha)}(w)]$ , в который случайная величина  $R(w)$  попадает с вероятностью  $1-\alpha$ :

$$\check{P}(R(w) \in [\check{R}^{(\alpha)}(w), \hat{R}^{(\alpha)}(w)]) = 1 - \alpha. \quad (11.28)$$

Для определения зависящих от  $w$  и  $\alpha$  пределов риска  $R(w)$  — причем прежде всего важен верхний предел  $\hat{R}^{(\alpha)}(w)$  — необходимо по распределению  $R$  рассчитать распределение  $R(w)$ .

Для получения распределения плотности вероятностей  $g(r)$  риска  $R$  используем формулу

$$r(x) = \int_{y=-\infty}^x a(x, y) f_Y(y) dy. \quad (11.29)$$

В отличие от (11.18) ограничимся здесь важным для практики случаем, в котором риск наступает, когда нагрузка начинает превышать несущую способность. Величина  $r(x)$  означает здесь среднюю величину ущерба, когда для несущей способности имеет место плотность вероятности  $f_Y$ , а нагрузка принимает определенное значение  $x$ , причем  $y \leq x$ . Применяя символику теории вероятности, можно написать  $r(x) = E(A | Y < x)$ . Здесь  $A = a(X, Y)$  — случайные значения штрафной функции  $a(x, y)$  в зависимости от случайных величин  $X$  и  $Y$  для нагрузки и несущей способности, а символ  $E(A | Y < x)$  означает математическое ожидание  $A$  при условии  $Y < x$ . Безусловное (абсолютное) среднее значение ущерба получается путем усреднения по плотности нагрузки  $f_X$  и равно

$$\mu(R) = E(A) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} a(x, y) f_Y(y) f_X(x) dy dx. \quad (11.30)$$

Рассматривая функцию  $x \rightarrow r(x)$  в соответствии с формулой (11.29) в зависимости от случайной нагрузки  $X$ , получаем непосредственно  $r(X) = R$ . Можно исходить из того, что  $x \rightarrow a(x, y)$  для определенного  $y$  является строго монотонной возрастающей функцией, откуда следует то же свойство для функции  $x \rightarrow r(x)$ . Соответственно существует монотонно возрастающая обратная функция  $r \rightarrow x(r)$ . Если, далее, предположить, что функция  $x \rightarrow r(x)$  дифференцируема (причем здесь достаточно существования частной производной функции  $a(x, y)$  по  $x$ ), то по известным формулам теории вероятности для плотности вероятности  $g(r)$  случайной величины  $R$  получаем

$$g(r) = [f_X(x(r))] / [r'(x(r))]. \quad (11.31)$$

Случайная величина  $R$  представляет, таким образом, случайное среднее значение ущерба в результате события  $X \geq Y$ ; среднее значение этой величины равно  $R_0$ .

Плотность вероятности  $g_w(r)$  определяемого формулой (11.31) среднего риска  $R(w)$  при числе реализаций  $w$  получается по формуле свертки:

$$g_w(r) = w \int_{-\infty}^{+\infty} g_{w-1}(wv - v) g(v) dv, \quad w \geq 2. \quad (11.32)$$

Для унификации обозначений будем считать, что одиночной рискованной ситуации соответствует  $w=1$ . Среднее значение случайных величин риска  $R(w)$  для всех  $w=1, 2, \dots$  равно тому же значению  $R_0$  и по закону больших чисел при неограниченном росте  $w$  распределения  $R(w)$  концентрируются вокруг

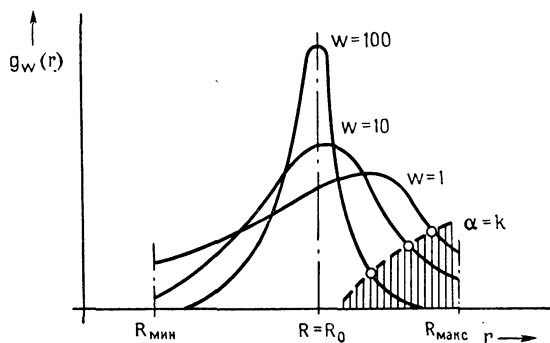


Рис. 11.0. Функция плотности вероятностей среднего риска.

$R_0$  (см. рис. 11.10), так что в пределе получается вырожденное распределение в виде  $\delta$ -функции Дирака при  $R=R_0$ .

Зная плотность вероятности  $g_w$ , можно теперь количественно оценить вероятность возможных значений риска  $R(w)$  при числе реализаций  $w$ . Так, например, для симметричного интервала вокруг среднего значения  $R_0$  границы интервала  $\tilde{R}^{(\alpha)}(w) = R_0 - r_0$ ,  $\hat{R}^{(\alpha)}(w) = R_0 + r_0$  определяются уравнением

$$\int_{R_0 - r_0}^{R_0 + r_0} g_w(r) dr = 1 - \alpha,$$

где  $\alpha$  — заданная вероятность ошибки. Часто на основе распределений для нагрузки и несущей способности, а также для штрафной функции получаются однозначные границы  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  возможных значений риска  $R(w)$ :

$$R(w) \in [R_{\min}, R_{\max}]. \quad (11.33)$$

Рис. 11.10 соответствует такой ситуации.



## Формула

$$\alpha = \int_{\hat{r}_w(\alpha)}^{R_{\max}} g_w(r) dr \quad (11.34)$$

устанавливает связь между вероятностью и значением  $\hat{r}_w(\alpha)$ , причем при  $w$ -кратной реализации случайная величина  $R(w)$  по меньшей мере равна  $\hat{r}_w(\alpha)$ . Эту вероятность можно также воспринимать как готовность к риску. Для достижимой на практике точности оценки штрафной функции и соответствующих плотностей представляются оправданными значения  $\alpha$  до 0,1. Показанная на рис. 11.10 пунктиром кривая, соответствующая определенному заданному значению  $\alpha$ , имеет точки пересечения с кривыми плотности вероятности для различных чисел реализации  $w$ ; абсциссы этих точек дают на оси  $r$  значения  $r_w(\alpha)$ . Если теперь использовать соответствующие определенному  $\alpha$  значения  $r_w(\alpha)$ , зависящие от  $w$ , в качестве основы для принятия решения, то нужно каждый раз выбирать такие варианты, для которых значения  $\hat{r}_w(\alpha)$  наименьшие.

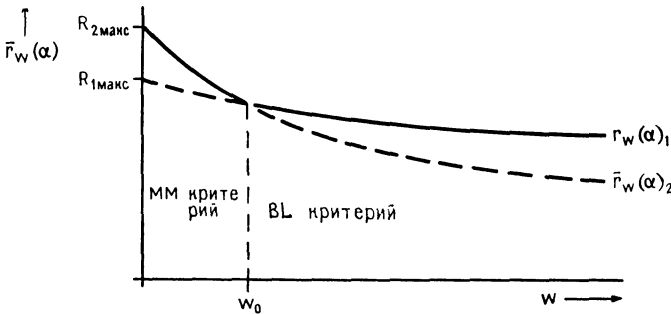


Рис. 11.11. Зависимость величины риска от числа реализаций.

$\hat{r}_w(\alpha)_1$  — вариант 1;  $\hat{r}_w(\alpha)_2$  — вариант 2.

На рис. 11.11 показан ход функции  $\hat{r}_w(\alpha)$  для двух вариантов решения. При этом вариант 1 соответствует минимаксному, а вариант 2 — байесовскому критериям решения. Из рисунка видно, что при  $w \leq w_0$  следует выбрать вариант 1, а при  $w \geq w_0$  — вариант 2.

Расчет плотностей вероятности  $g_w$  по формуле свертки может оказаться слишком трудоемким делом. Нередко удастся упростить расчеты с помощью функциональных преобразований. Для непрерывных функций плотности вычисления произ-

водят с помощью преобразования Лапласа в четыре этапа:

$$g(r) \xRightarrow{S(1)} G(p) \xRightarrow{S(2)} G^w(p) \xRightarrow{S(3)} G^w\left(\frac{p}{w}\right) \xRightarrow{S(4)} g_w(r).$$

Символы преобразований здесь означают:

$S(1) — L\{g(r)\}$  — прямое преобразование Лапласа;  $S(2) —$   $w$ -кратная свертка;  $S(3) —$  преобразование координат;  $S(4) — L^{-1}\{G^w(p/w)\}$  — обратное преобразование Лапласа. Необходимое на этапе  $S(1)$  преобразование Лапласа

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-pr} g(r) dr$$

для широкого класса функций  $g(r)$  можно осуществить, пользуясь справочными таблицами; то же справедливо и для обратного преобразования. На этапе  $S(2)$  выявляется выгода введенного преобразования Лапласа:  $w$ -кратная свертка заменяется просто возведением в степень (с показателем  $w$ ). На этапе  $S(3)$  требуется только замена  $p$  на  $p/w$ .

Для примера проследим ход преобразований для нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$  с плотностью распределения

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

где

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \xRightarrow{S(1)} e^{-(\sigma p)^2/2} \xRightarrow{S(2)} \\ & \xRightarrow{S(2)} e^{w(\sigma p)^2/2} \xRightarrow{S(3)} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{w}}p\right)^2} \xRightarrow{S(4)} \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{w}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{w}}\right)^2}}, \end{aligned}$$

что соответствует известному факту, что  $w$ -кратная свертка нормального распределения  $N(0, \sigma^2)$  по формуле (11.27) приводит к нормальному распределению  $N(0, \sigma^2/w)$ .

Для часто встречающегося экспоненциального распределения с плотностью вероятности

$$g(r) = \lambda e^{-r}, \quad \lambda > 0$$

отдельные этапы преобразования выглядят так:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda r} & \xRightarrow{S(1)} \frac{\lambda}{p+\lambda} \xRightarrow{S(2)} \frac{\lambda^w}{(p+\lambda)^w} \xRightarrow{S(3)} \\ & \xRightarrow{S(3)} \frac{(\omega\lambda)^w}{(p+\omega\lambda)^w} \xRightarrow{S(4)} \frac{(\omega\lambda)^w r^{w-1} e^{-\omega\lambda r}}{(\omega-1)!}. \end{aligned}$$

Если имеются дискретные распределения с постоянным шагом  $\Delta r$ , т. е. так называемые решеточные распределения с постоянной решетки  $\Delta r$ , то можно с успехом применить  $z$ -преобразование. Будем исходить из дискретного распределения величин  $(x_k)$  и соответствующих вероятностей  $(p_k)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ ; при этом разность  $x_{k+1}-x_k$  для всех рассматриваемых  $k$  постоянна и равна  $\Delta$ , а последовательность  $k$  может быть конечной или бесконечной (случай конечного или бесконечного дискретного распределения). Не вдаваясь в подробности, примем  $x_0=0$ . Затем образуем функцию

$$F(z) = p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots, \quad (11.35)$$

представляющую собой так называемое  $z$ -преобразование  $z\{p_k\}$ . Тогда возведение в степень  $w$  даст

$$F^w(z) = p_{w_0} + p_{w_1} z^{-1} + p_{w_2} z^{-2} + \dots, \quad (11.36)$$

т. е.  $w$ -кратную свертку исходного распределения в точках  $(x_k)$  при  $x_{k+1}-x_k=\Delta$  и  $x_0=v$  с соответствующими вероятностями  $(p_{wk})$ ,  $k=0, 1, \dots$

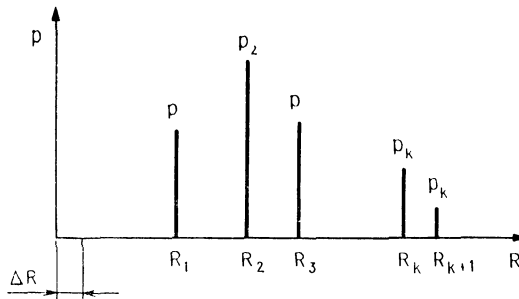


Рис. 11.12. Риск с нерешеточным распределением.

Таким образом,  $z$ -преобразование осуществляется по следующим этапам:

$$(p_k) \xRightarrow{S(1)} F(z) \xRightarrow{S(2)} F^w(z) \xRightarrow{S(3)} (p_{wk}),$$

где  $S(1)$  — проведение  $z$ -преобразования по формуле (11.35);  $S(2)$  —  $w$ -кратная свертка по формуле (11.36);  $S(3)$  — обратное преобразование  $z^{-1}\{F^w(z)\}$ , т. е. извлечение вероятностей  $p_{wk}$  из (11.35).

Заметим, что показатель кратности свертки  $w$  при принятых выше обозначениях устанавливается таким, чтобы исходное распределение соответствовало  $w=1$ . Если имеется дискретное решеточное распределение с  $n$  эквидистантными значениями  $x_0$ ,

$x_1, \dots, x_n$ , то для показателя кратности свертки  $w$  получается решеточное же распределение с  $1+w(n-1)=N_w$  значениями. Это дает для математического ожидания  $M_w$  и соответственно дисперсии  $S_w^2$  следующие выражения:

$$M_w = \frac{1}{N_w} \sum_{k=1}^{N_w} x_k p_{wk}; \quad S_w^2 = \frac{1}{N_w} \sum_{k=1}^{N_w} (x_k - M_w)^2 p_{wk}.$$

Расчет  $M_w$  и  $S_w^2$  можно произвести с помощью известных соотношений теории вероятностей, исходя из среднего значения  $M_1$  и дисперсии  $S_1^2$  для исходного распределения, характеризующегося значением  $w=1$ :

$$M_w = M_1; \quad S_w^2 = w S_1^2. \quad (11.38)$$

Продемонстрируем применение  $z$ -преобразования к распределению Пуассона:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Это дискретное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , определенное на бесконечной области значений неотрицательных действительных чисел и характеризующееся средним значением  $M_1 = \lambda$  и дисперсией  $S_1^2 = \lambda$ .

Три этапа  $z$ -преобразования

$$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \xRightarrow{S(1)} e^{-\lambda} e^{\lambda/z} \xRightarrow{S(2)} e^{-\lambda w} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \xRightarrow{S(3)} e^{-\lambda w} \frac{(\lambda w)^k}{k!}$$

приводят к распределению Пуассона с параметром  $\lambda_w$ , которое обладает средним значением  $M_w = \lambda w$  и дисперсией  $S_w^2 = \lambda w$ .  $Z$ -преобразование в принципе применимо также к дискретным нерешеточным распределениям. Используя нормирующий множитель  $\Delta R$  (см. рис. 11.12), образуем  $z$ -функцию:

$$F(z) = p_1 z^{-\left(\frac{R_1}{\Delta R}\right)} + p_2 z^{-\left(\frac{R_2}{\Delta R}\right)} + \dots, \quad (11.40)$$

где  $p_k$  — вероятности величин риска  $R_k$ . При  $w$  реализациях образуется  $w$ -я степень:

$$F_w(z) = \left[ \sum p_k z^{-\left(\frac{R_k}{\Delta R}\right)} \right]^w,$$

откуда путем расчета, аналогичного проводившемуся выше для случая эквидистантной решетки, можно получить соответствующие вероятности риска.

---

## МНОГОЦЕЛЕВЫЕ РЕШЕНИЯ

---

Эта глава дает самое первое введение в проблематику принятия многоцелевых решений. Читателям, подробнее интересующимся этим, еще и в настоящее время интенсивно развивающимся направлением теории принятия решений, можно указать дополнительную литературу, причем книги Пешеля и Риделя (1976) и Эстера (1987) ориентированы в основном на технику, тогда как работы Фурукавы (1982), Клетцера (1978), Хенига (1983) и Уайта (1980) в большей мере посвящены математическим основам.

### 12.1. Общие положения

Рассматривавшиеся до сих пор цели были простыми; их можно было охарактеризовать одной величиной, пригодной для описания системы или процесса. Если имеется множество целей, которые, тем не менее, могут быть измерены в одинаковых единицах, то можно естественным путем отыскать единую результирующую цель. Однако часто представляют интерес такие множества целей, элементы которых не могут быть выражены единообразно. В разд. 9.1 приводился такой пример.

Многомерные цели могут находиться друг с другом в следующих отношениях:

1. Цели взаимно нейтральны. Система или процесс могут применительно к отдельным целям характеризоваться и рассматриваться независимо.

2. Цели кооперируются. Здесь, как правило, систему или процесс удается рассматривать применительно к одной цели, а остальные достигаются одновременно.

3. Цели конкурируют. В этом случае одной из целей можно достигнуть лишь за счет другой.

Если цели частично нейтральны, частично кооперированы, а частично конкурируют между собой, то задача формулируется таким образом, что нужно принимать во внимание только кон-

курующие цели. Рассмотрение нейтральных или кооперативных целей не представляет особых трудностей, так что проблемы, ориентированные на множество целей, прежде всего должны быть рассмотрены в части конкурирующих целей, коль скоро все они вместе не могут быть выражены одномерным параметром. Чаше всего это выглядит так, что каждый раз последовательно считают переменной одну из целей и оптимизируют ее, а остальные цели рассматриваются как ограничения. Это весьма рациональный метод, в процессе которого одна задача сводится к другой, ориентированной на единственную цель. В общем случае сильные ограничения сужают пространство оптимизации в большей или меньшей степени произвольно. Это нередко может привести к такой ситуации, когда оптимум достигнут не будет и оптимальный вариант решения найти не удастся.

Если отдельные цели удается расположить в определенном иерархическом порядке и благодаря разному весу целей этот порядок ярко выражен, то можно выбрать лексикографический метод решения. На первом этапе определяют множество вариантов решения, которые удовлетворяют цели наивысшего ранга. При определенных условиях здесь может быть предварительно задана область равноценных применительно к желаемой цели решений. Сформированное таким образом множество решений на втором этапе ограничивается дальше, так же, как на первом, но уже применительно к следующей по важности цели в ряду приоритетов, и этот процесс продолжается, пока не останется один вариант решения. Если не удастся прийти к единственному решению, то из нескольких оставшихся приходится делать субъективный выбор. Поскольку это становится необходимым только по отношению к целям низшего ранга, нежелательное влияние такого субъективного вмешательства обычно достаточно ограничено. Описанный метод прост и его широко практикуют при решении технических задач [30]. Оптимальность здесь не гарантируется. Хотя обычно нельзя категорически указать или однозначно назвать одну доминирующую цель из множества данных, выстраивание целей по ранжиру по существу заранее предполагает наличие некоторой метациели.

Описываемый ниже путь исходит из наличия такой доминирующей цели; при этом различие в размерности обходят путем нормирования. В качестве метациелей рассматриваются максимизация, минимизация или оптимизация в направлении достижения нормированных частных целей оценочной функции рассматриваемой задачи.

В заключение затронуты математические концепции полиоптимизации и теория нечетких множеств в порядке подготовки к более подробному рассмотрению решений, ориентированных на множество целей.

## 12.2. Реализация целей

Если необходимо принять решение, имея в виду  $K$  конкурирующих целей, то на основе оценки  $K$  получают матрицу решений  $\|e_{ij,k}\|$ ,  $k=1, \dots, K$ , где  $e_{ij,k}$  — полезность при состоянии исходных данных  $F_j$  и варианте решения  $E_i$  применительно к цели  $Z_k$ . Каждая из  $K$  (двумерных) матриц определяется по известным оценочным функциям. В результате для каждой матрицы  $\|e_{ij,k}\|$  при определенном  $k$  получают матрицу решений  $E_{0,k}$ . При этом часть вариантов решения выделяется для оптимизации. Уже это часто позволяет прояснить ситуацию с выбором решения. В частности, множество

$$E_0 = \bigcup_{k=1}^k E_{0,k}$$

может состоять из единственного варианта, и в этом случае задача решается однозначно. Если множество вариантов решения существенно ограничено, то оптимальный вариант может быть выбран субъективно.

Если не удастся прийти к определенному решению уже на этой стадии, то следует сначала пронормировать реализацию цели, например, следующим образом:

$$r_{ik} = (Z_{ik} - \min_i Z_{ik}) / (\max_i Z_{ik} - \min_i Z_{ik}), \quad (12.1)$$

где  $Z_{ik}$  —  $k$ -е значение цели варианта  $E_i$ ,  $r_{ik}$  — степень реализации  $k$ -й цели  $i$ -го варианта.

Во многих встречающихся на практике случаях не удастся определить  $\min_i Z_{ik}$  и (или)  $\max_i Z_{ik}$ . Тогда приходится идти по другому пути нормирования. Если не удастся определить  $\min_i Z_{ik}$ , то можно пронормировать  $r_{ik}$  следующим образом:

$$r_{ik} = Z_{ik} / \max_i Z_{ik}, \quad (12.2)$$

а если нельзя определить  $\max_i Z_{ik}$ , то, соответственно,

$$r_{ik} = Z_{ik} / \min_i Z_{ik}. \quad (12.3)$$

Если же неизвестны оба экстремальных значения, то удовлетворительный результат дает нормировка относительно принятой за базовую величины  $Z_{hk}$ :

$$r_{ik} = Z_{ik} / Z_{hk}. \quad (12.4)$$

При нормировке по формуле (12.4) предполагается, что существует приемлемое решение, которое может рассматриваться как достаточное и использоваться в качестве базового.

При субъективно устанавливаемых весах целей  $g_k$  удастся получаемую двумерную матрицу  $\|r_{ik}\|$  преобразовать в один вектор. Компоненты этого вектора определяются аддитивным сочетанием взвешенных степеней реализации:

$$r_i = \frac{1}{K} \left( \sum_{k=1}^k r_{ik} g_k \right). \quad (12.5)$$

Вектор  $r_i$  теперь можно вновь интерпретировать как матрицу решений и соответствующим образом оценивать.

Здесь нужно особо упомянуть доминирующий на практике случай, когда цели связаны дизъюнктивно (т. е. по принципу ИЛИ). Таким образом связаны цели, которые можно сравнить друг с другом, так что меньшая степень реализации одной цели может быть скомпенсирована лучшим исполнением другой. Наоборот, для конъюнктивно (т. е. по принципу И) связанных целей характерно положение, когда невыполнение одной частной цели ведет к тому, что не достигается итоговая цель.

Часто из-за низкой точности интуитивной оценки веса целей дальнейшее рассмотрение теряет смысл.

Конъюнктивная связь целей приводит, например, в частном случае к соотношению

$$r_i = (\min_k r_{ik} g_k). \quad (12.6)$$

При смешанной связи  $(Z_1 \vee Z_2 \vee Z_3) \wedge Z_4$  получают, например,

$$r_{ij} = \min_k \left[ \frac{1}{3} (r_{i1} + r_{i2} + r_{i3}); r_{i4} \right].$$

Примером нелинейного взвешивания является

$$r_{ik} = 1 - [1 - (Z_{ik} - \min_i Z_{ik}) / (\max_i Z_{ik} - \min_i Z_{ik})]^{1/g_k}. \quad (12.7)$$

Однако прежде чем предпринимать усилия в этом направлении, следует здраво оценить, не ведут ли к цели более рациональным путем другие теоретические предпосылки.

### 12.3. Выбор внутри эффективных множеств

В разд. 11.3 и на рис. 11.2 уже упоминались эффективные множества, которые называются также множествами Парето или компромиссными. Полиоптимизация [16] ставит задачу



найти множество решений, заданных таким эффективным множеством. При этом нужно избежать принятия преждевременного поспешного компромисса, исходящего из решения, не принадлежащего эффективному множеству, чтобы не упустить тем самым оптимального варианта.

Решение  $Y_1$  предпочитается решению  $Y_2$ , что символически записывается  $Y_1 \succ Y_2$ , когда эти решения обладают свойствами

$$z_k(Y_1) \geq z_k(Y_2) \quad \text{при} \quad k=1, \dots, K,$$

и по меньшей мере для одного  $k_0$  справедливо соотношение

$$\exists k_0 : z_{k_0}(Y_1) > z_{k_0}(Y_2),$$

где  $z_k$  —  $k$ -я целевая функция, а  $k$  — текущий индекс.

Из всех таких решений  $Y_p$  и составляется эффективное множество:

$$\{Y_p\} = \{Y_i \in Y \mid \nexists Y_i \in Y : Y_i \succ Y_i\}.$$

Внутри этого множества следует искать компромисс другими вспомогательными средствами, поскольку множество эффективных решений в рамках теории полиоптимизации нельзя еще более упорядочить.

Если имеются другие возможности для упорядочения, то следует посмотреть, что рациональнее — применить их сразу к множеству всех возможных решений  $\{Y\}$  или сделать промежуточный шаг к эффективному множеству. Одно из таких вспомогательных средств для дальнейшего упорядочения представляет приведенная в разд. 13.3 теория нечетких множеств [18].

Целевая функция

$$z = f(x_i) \quad \text{при} \quad i=1, \dots, n,$$

где  $x_i$  — дискретное множество реализаций параметра  $x$ ,  $x_i \in X$ , перекрывается характеристической функцией (разд. 13.3)

$$\mu(z(x_i)).$$

В результате возникает нечеткое множество

$$Z = \{z(x_i), \mu(z(x_i)) \mid \forall (x_i \in X, \wedge i=1, \dots, n)\}. \quad (12.8)$$

где  $z(x_i)$  — дискретная реализация целевой функции,  $\mu(z(x_i))$  — характеристическая функция,  $X$  — вектор возможных реализаций.

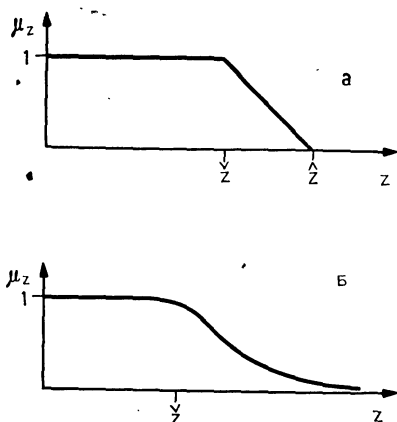


Рис. 12.1. Двусторонние (а) и односторонние (б) ограниченные характеристические функции.

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \mu_z = & \begin{cases} 1 & \text{при } z < \check{z} \\ \frac{z - \check{z}}{z - \hat{z}} & \text{при } \check{z} \leq z \leq \hat{z} \\ 0 & \text{при } z > \hat{z} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 1 & \text{при } z < \check{z} \\ \frac{1}{1 + a(\check{z} - z)^b} & \text{при } z \geq \check{z} \end{cases} \\
 & \quad \quad \quad a, b > 0
 \end{aligned}$$

Такие характеристические функции устанавливаются ведущим обработку субъективно. Пример двух употребительных функций показан на рис. 12.1.

Если существует множество целей

$$z_k \quad \text{при } k=1, \dots, K,$$

то при введении соответствующей функции  $\mu_k$ ,  $k=1, \dots, K$ , получается  $K$  нечетких множеств

$$Z_k = \{z_k(x_i), \mu_k(z_k(x_i)) \mid x_i \in X, i=1, \dots, n\}.$$

Оптимизация с помощью целевой функции может принять форму

$$\begin{aligned}
 z_{\text{опт}} = & \bigvee_{x_i \in X} \bigwedge_{j=1}^m Z_j(x_j) \\
 & i=1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Для связи целей используются операторы

$$\wedge : \Sigma [\max]$$

$$\vee : \Pi [\min]$$

Выбор их в значительной мере произволен. Приведем выбранные наугад две возможности:

$$z_{\text{опт}} = \max_i \min_j Z_j(x_i), \quad (12.10)$$

$$z_{\text{опт}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_j^m Z_j(x_i). \quad (12.11)$$

Расчет, особенно в случае линейных характеристических функций, очень прост. В трудно обозримых случаях при выборе решений нужно сначала переходить к множеству Парето и лишь затем оптимизировать нечеткие множества, так как на них субъективные факторы оказывают большее влияние.

---

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ

---

### 13.1. Основные пути выбора решения

Для решения проблем, связанных с недостатком информации, имеются прежде всего следующие пути: либо стараются уменьшить дефицит информации, либо примиряются с недостатком информации и продолжают исследование в таких условиях.

Дефицит информации может быть уменьшен различными способами в зависимости от того, где он возникает. Дефект может возникнуть уже в момент получения информации, когда какая-либо величина искажается из-за ошибки измерения. Такие ошибки удается обычно в большей или меньшей степени исправить за счет повышения затрат на измерение, например, путем повторения измерений при случайных ошибках. Дефицит информации может остаться, если затраты на его уменьшение велики, недостаточно время, которым мы располагаем, или из-за ограниченности знаний какой-то принципиальный недостаток не может быть устранен.

Так же, как и при получении информации, на ее качество может оказывать аналогичное влияние обработка — дефицит информации может возникнуть вследствие недостатков модели объекта или методов обработки.

Можно попробовать выбрать более адекватные модели или принять более целесообразные методики. Границы и здесь определяются допустимыми затратами, отпущенным временем или недостатком знаний.

Один весьма радикальный для технической проблематики путь уменьшения дефицита информации нужно упомянуть особо. Речь идет о выборе решения с повышенной адаптивной способностью. Во многих проектах решение по частным вопросам можно принять позже, используя при этом более новую и полную информацию (принцип минимальной заблаговременности). Как правило, большая адаптивность требует и больших затрат, что может определенным образом ограничивать возможности таких решений.

Разнообразные способы устранения данного недостатка информации при решении некоторой технической проблемы наукой и практикой уже найдены и используются — при условии, что затраты оправданы.

Если же недостаток информации по уже названным или каким-либо иным причинам может быть допущен, то опять можно выбрать один из трех путей: а) оценочные методы; б) анализ чувствительности; в) методы принятия решений.

Для установления однозначного эквивалентного значения некоторого параметра из множества значений имеются математические оценочные методы, которые часто, однако, не учитывают технических последствий. Примером здесь может служить метод максимального правдоподобия.

Полученный однозначный параметр облегчает дальнейшую обработку. Содержание информации остается, однако, неизменным. Поэтому в отдельных случаях можно получить неоправданное отклонение от оптимума.

Анализ чувствительности основывается на том, что оптимальный облик технической системы или процесса не всегда заметно меняется, когда варьируют исходные данные. Ищут решение, которое слабо зависит или вообще не зависит от неизвестных исходных данных и, соответственно, определяют для этого оптимального решения диапазон нечувствительности по отношению к входным данным.

Анализ чувствительности также не дает никакого прироста информации относительно параметров внешних состояний. В разд. 13.2 схематично описан такой испытанный на практике метод.

Методы решения не влияют на содержание информации об исходных данных, но необходимую для решения дополнительную информацию можно получить, анализируя последствия.

В качестве альтернативной концепции в разд. 13.3 кратко изложена теория нечетких множеств. Там даны результаты, полученные на основе найденных или субъективно определенных характеристических функций.

Из упомянутых до сих пор выпадают методы однозначных или детерминированных эквивалентов. При использовании этих методов сначала решают проблему недостатка информации одним из трех указанных выше способов. Потом из множества значений многозначного параметра определяют такие дискретные реализации  $x_d$ , которые при однозначном решении задачи ведут к тем же результатам.

### 13.2. Критериальный анализ

Метод критериального анализа для технических применений на основе теории подобия был развит главным образом Вениковым [31]. Существенные положения критериального анализа состоят в том, чтобы исследовать, как себя ведут решения при

определенных изменениях входных величин и, в частности, насколько стабильными они остаются.

Системы или процессы называются подобными, если они формально описываются одной и той же математической моделью, а их переменные величины связаны между собой коэффициентами подобия. Например, подобие между величиной  $x_0$  в рассматриваемом физическом процессе и соответствующей величиной  $x_m$  в описывающей процесс модели определяется коэффициентом  $c_x = x_0/x_m$ . На рис. 13.1 показаны подобные процессы  $U=f(t)$  при различных коэффициентах подобия.

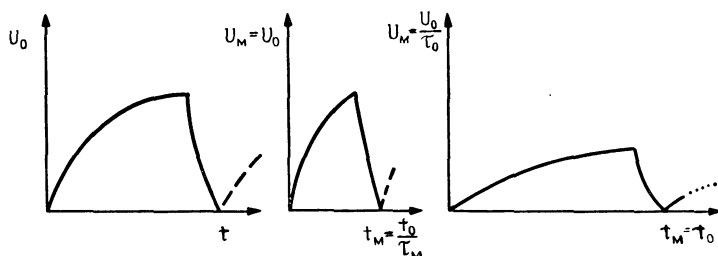


Рис. 13.1. Ход функции  $U=f(t)$  при различных коэффициентах подобия.

Системы или процессы называются математически подобными, если их можно описать подобными уравнениями. Подобие уравнений в свою очередь означает, что коэффициенты  $c_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , вкупе с параметрами  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$  моделей  $y_i = c_i x_i$ , удовлетворяют условию

$$f(y_1, \dots, y_n) = f(c_1, \dots, c_n) f(x_1, \dots, x_n). \quad (13.1)$$

Для целевой функции исходной модели

$$z = z(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m c_i \prod_{l=1}^n x_l^{a_{il}} \quad (13.2)$$

при дополнительных условиях

$$z_k = \sum_{i=1}^m c_{ki} \prod_{l=1}^n x_l^{a_{il}} = 1; \quad k=1, \dots, K, \quad (13.3)$$

где  $z$  — целевая функция,  $m$  — число слагаемых функции,  $n$  — число переменных,  $c_i$ ,  $c_{ki}$  — коэффициенты подобия,  $x_l$  — переменные,  $a_{il}$  — показатели степени,  $K$  — число дополнительных условий,

$$c_{ik} \begin{cases} c_i, & \text{когда } i\text{-е слагаемое содержится в дополнительном} \\ & \text{условии } k \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

следует, например, задачу минимизации

$$z(x) \longrightarrow \min_{x \in R^n}$$

решать, полагая

$$\begin{aligned} z_k(x) &\leq 1; & k=1, \dots, K \\ c_i &\geq 0; & i=1, \dots, m \\ x_l &> 0; & l=1, \dots, n \\ -\infty &< a_{il} < +\infty \end{aligned}$$

Уравнение (13.2) можно сокращенно записать в форме

$$z = \sum_{i=1}^m A_i, \quad (13.4)$$

где

$$A_i = c_i \prod_{l=1}^n A_{il}. \quad (13.5)$$

Веса  $w_i$  слагаемых  $A_i$  относительно значения функции определяются уравнением

$$w_i = \frac{A_i}{z} = \frac{c_i}{z} \prod_{l=1}^n x_l^{a_{il}}, \quad (13.6)$$

причем  $w_i \geq 0$ .

Благодаря этому нормированию по отношению к  $z$  имеем:

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (13.7)$$

откуда следует  $w_i \leq 1$ .

Соотношения весов оптимального варианта целевой функции  $w_1^*: w_2^*: \dots: w_m^*$  определяют так называемую *соразмерность*. Критериальный анализ включает исследование хода целевой функции близ оптимума путем рассмотрения весов  $w_i$ . Эти веса легко определить с помощью уравнений (13.6) и (13.7). Целевые функции с гладким максимумом следует рассматривать, как нечувствительные, а с острым максимумом — как чувствительные. Путем задания допустимых отклонений определяется область нечувствительности целевой функции. Для этого варьируют входные величины  $x_l$  в интервале неопределенности  $x_l$ ,  $x_l$  и прослеживают с помощью уравнения (13.5) влияние этих величин на целевую функцию. Если мы при этом не выходим из пределов нечувствительности, то недостатком информации можно пренебречь.

Особую ценность этот метод представляет, когда не поддающимся учету факторам или техническим условиям при принятии

решения отдается предпочтение и можно предполагать (хотя это и не удастся сразу строго обосновать), что учет этих факторов и условий и с экономической точки зрения окажется полезным. Если с помощью критериального анализа удастся показать, что даже при очень больших изменениях входных параметров  $x_i$  решение остается нечувствительным, то можно считать задачу решенной. Такой путь весьма рационален. Часто при реализации полученного результата приходится считаться с жестко заданной стандартами шкалой параметров. Влияние такого отклонения при выборе ближайшего к результату допустимого по стандарту значения параметра также может быть надежно проконтролировано.

Критериальный анализ применим к целевым функциям, которые можно представить уже приводившимся выше уравнением (13.3):

$$z = \sum_{i=1}^m c_i \prod_{l=1}^n x_l^{a_{il}}$$

с определителем матрицы

$$\det \|a\| = 0, \quad (13.8)$$

$$\|a\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (13.9)$$

### 13.3. Нечеткие множества

Для ситуаций, которые могут быть охарактеризованы лишь сравнительно неточно, недавно был введен в практику новый способ рассмотрения — методы так называемых нечетких (размытых) множеств. Эту концепцию предложил в середине 1960-х гг. Л. Заде; с тех пор в этом направлении выполнено немало исследований, внесших существенный вклад в проблему, и, главное, опробовано много интересных применений. Методы нечетких множеств исходят из тех соображений, что творческое человеческое мышление в значительной мере протекает в рамках нечетких и не описываемых строго количественно понятий; такому мышлению не могут полностью соответствовать модели классической математики с их однозначной двухпозиционной логикой. Таким образом, в методах нечетких множеств стараются как можно шире применить испытанные математические подходы и прежде всего математическую символику, принимая вместе с тем нечеткость оценок и решений как важное отражение действительно существующей ситуации. Это по-



зволяет связать строгость классической математики и, следовательно, точное знание, с одной стороны, с неопределенностью и многозначностью ситуаций, включая эмоционально окрашенные процессы познания реального мира, с другой. Успешное решение поставленной таким образом задачи позволяет ввести и рационально использовать такие понятия, как нечеткие закономерности, соотношения, алгоритмы. Исследования в области «нечеткого» анализа находятся в настоящее время еще в процессе интенсивного развития; это относится как к основам, так и к возможностям применения анализа. Ниже мы вкратце ознакомимся с этой новой теорией, причем в центре внимания будут как основополагающие понятия, так и соотношения для решений в условиях неопределенности. Интересующимся дальнейшими подробностями читателям можно порекомендовать обратиться к имеющимся широко охватывающим проблему литературным источникам. Здесь наряду с первыми оригинальными работами Л. Заде и Р. Беллмана следует упомянуть компетентные работы Х. Циммермана, например [32], а также А. Кауфмана, например [33].

Первоочередная задача теории нечетких множеств (в дальнейшем сокращенно — НМ) — дать «размытое» определение принадлежности некоторого объекта или элемента множеству. Для описания такой ситуации обозначим буквой  $E$  некоторое множество, а буквой  $A$  — подмножество  $E: A \subseteq E$ . В классической математике принадлежность некоторого элемента  $x \in E$  к подмножеству  $A$  однозначно описывается индикаторной функцией  $1_A$ :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{в случае } x \in A, \\ 0 & \text{в случае } x \notin A, \end{cases} \quad (13.10)$$

а в рамках теории НМ к концепции нечеткой принадлежности приходят с помощью характеристической функции  $x \rightarrow \mu_A(x)$ ,  $x \in E$ . Такая характеристическая функция (в дальнейшем сокращенно ХФ) может, в отличие от двузначной ситуации (13.10), принимать большее число значений в любом подходящем множестве  $M$ . Нечеткое подмножество  $A$  множества  $E$  будет определяться множеством упорядоченных пар:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in E\}. \quad (13.11)$$

Рассматривая множество  $M$  всех возможных значений некоторой ХФ, обычно ограничиваются так называемым нормальным случаем  $M = [0, 1]$ , и соответствующее нечеткому множеству  $A$  также называют нормальным. На рис. 12.1 в наглядной форме дан пример нормальной ХФ. В дальнейшем ограничимся доминирующим случаем нормальной ХФ. Принадлежность некото-

рого элемента  $x \in E$  нечеткому множеству  $A$  можно тогда в количественной или взвешенной форме символически выразить, например, следующим образом:

$x \in A$  означает « $x$  определенно принадлежит  $A$ »

$x \notin A$  означает « $x$  определенно не принадлежит  $A$ »

$x \in A$  означает «принадлежность множеству  $A$  определяется степенью 0,8»

Два НМ  $A$  и  $B$  называются равными, если для всех  $x \in E$  имеет место равенство ХФ:  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ .

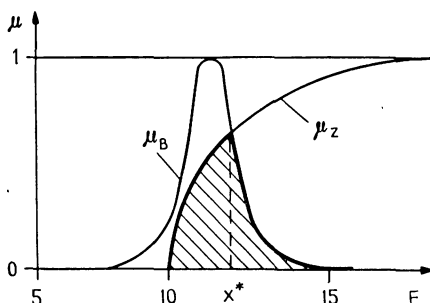


Рис. 13.2. Характеристические функции нечетких множеств.

В соответствии с положениями теории множеств говорят, что НМ  $A$  содержится в НМ  $B$ , если для всех  $x \in E$  справедливо соотношение  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ .

Важное положение «нечеткого» анализа состоит в определении связей НМ, аналогичных соответствующим соотношениям алгебры множеств. Связи двух НМ  $A$  и  $B$  можно охарактеризовать заданием соответствующих ХФ. Различные связи определяются следующим образом:

*Пересечение*  $A \cap B$ ,  $\mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

*Прямое произведение*  $AB$ ,  $\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

*Объединение*  $A \cup B$ ,  $\mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

*Алгебраическая сумма*  $A \oplus B$ ,  $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

Понятие «нечеткое» отношение получается из понятия отношения  $R$  теории множеств как подмножества декартова произведения двух множеств  $E$  и  $F$ :  $R \subseteq E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$ . Нечеткое отношение получается с помощью ХФ двух переменных  $(x, y) \rightarrow \mu_R(x, y) \in M = [0, 1]$  в виде  $\tilde{R} = \{(x, y), \mu_R(x, y) \mid (x, y) \in R\}$ .

Несмотря на известную аналогию с вероятностными моделями, существенное отличие здесь состоит в том, что неопределенность связана не со случайностью, а с имеющимися неточностями и размытостями. Главное преимущество концепции нечетких

множеств состоит в том, что нет нужды математически формулировать задачу с высокой точностью, если мы вынуждены или готовы в принципе лишь к нечеткому описанию задачи с использованием терминологии «нечеткого» анализа.

Применение «нечеткого» анализа, особенно полезного в ситуациях, когда нужно принять решение, проиллюстрируем на двух примерах, приведенных основателями этой теории [34].

Пусть для ситуации, в которой нужно принять решение, имеются: 1) множество вариантов решения  $E$ ; 2) ограничивающие дополнительные условия; 3) одна или много целевых функций.

Таблица 13.1. Пример выбора варианта решения в нечетких условиях

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_{B1}$	0	0,1	0,4	0,8	1,0	0,7	0,4	0,2	0	0
$\mu_{B2}$	0,1	0,6	1,0	0,9	0,8	0,6	0,5	0,3	0	0
$\mu_{Z1}$	0,3	0,6	0,9	1,0	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1
$\mu_{Z2}$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,9	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2
$\mu_E$	0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0

Факторы (2) и (3) могут при этом быть нечеткими, т. е. определяться через НМ и ХФ.

*Пример 1*

1.  $E = \mathbb{R}^+$ , т. е. в качестве вариантов решения выступают все неотрицательные вещественные числа.

2. « $x \in E$  должно находиться в окрестности числа 11». Это можно нечетко учесть характеристической функцией ХФ  $\rightarrow \mu_B(x) = 1/[1 + (x - 11)^4]$ .

3. « $x$  должно быть значительно больше 10». Для этой нечеткой целевой функции подходит, например, ХФ

$$x \rightarrow \mu_Z(x) \begin{cases} 0, & x < 10 \\ 1 + 1/(x - 10)^2, & x \geq 10. \end{cases}$$

На рис. 13.2 показан ход нормальных ХФ  $\mu_B$  и  $\mu_Z$ .

В качестве ХФ для множества решений получаем путем обобщения пересечения:

$$\mu_E(x) = \min(\mu_B(x), \mu_Z(x)).$$

Таким образом, в качестве результата, т. е. рациональных вариантов решения, получаются значения  $x$  в заштрихованной области, ограниченной жирной линией на рис. 13.2, например, соответствующее максимуму значение  $x^*$ .

*Пример 2*

Пусть дано множество  $E = \{1, 2, \dots, 10\}$  вариантов решения, два нечетких дополнительных условия, заданных характеристическими функциями  $\mu_{B1}$  и  $\mu_{B2}$ , а также две нечеткие целевые функции, заданные характеристическими функциями  $\mu_{Z1}$  и  $\mu_{Z2}$ . ХФ заданы в табличной форме (см. табл. 13.1).

Последняя строчка этой таблицы содержит значения ХФ  $\mu_E$ , определяемой для нечеткой области решений условием  $\mu_E = \min(\mu_{B1}, \mu_{B2}, \mu_{Z1}, \mu_{Z2})$ . Оптимальный вариант решения  $x^*$  получается из требования

$$\mu_E(x^*) = \max_{x \in E} \mu_E(x) \rightarrow x^* = 5.$$

---

## ПЕРСПЕКТИВА

---

Цель настоящей книги — дать введение в принципы и практику способов принятия технических и хозяйственных решений. С учетом конкретных требований применения, а также возможных интересов читателей можно порекомендовать после усвоения материалов этой книги более глубокое изучение проблемы. Для дальнейшего изучения, по оценке авторов, прежде всего важны:

а) ориентированные на множество целей системы, т. е. задачи с векторными целевыми функциями;

б) динамические игры, т. е. многошаговые процессы выбора решений со случайными влияниями, в которых по крайней мере два партнера имеют различные интересы;

в) системы решений с иерархической структурой, зависящей от выбора стратегии (например, ведущий и второстепенные игроки).

Эти проблемы большей частью находятся еще в процессе исследований и развития, так что их представление в рамках книги — дело будущего.

---

## ЛИТЕРАТУРА

---

1. Engle K. Entscheidungstheorie. Basel und Stuttgart: Birkhauser Verlag 1975.
2. Sengupta J. K. Optimal Decision under Uncertainty. Berlin Heidelberg New-York: Springer Verlag 1981.
3. Buhlmann H. Loeffel H., Nievergelt E. Entscheidungs- und Spieltheorie-Berlin Heidelberg New-York: Springer Verlag 1975.
4. Fersche F., Nutzen- und Entscheidungstheorie, Opladen: Westdeutscher Verlag GmbH 1975.
5. Menges G. Grundmodelle wirtschaftlicher Entscheidungen. Opladen: Westdeutscher Verlag 1969.
6. Raiffa H. Einführung in die Entscheidungstheorie. Munchen Wien: R. Oldenbourg Verlag 1973.
7. Girlich H. J. Diskrete stochastische Entscheidungsprozesse und ihre Anwendung in der Lagerhaltung. Leipzig: Teubner Verlag 1973.
8. Specker E., Strassen V. Komplexität von Entscheidungsproblemen. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag 1976.
9. Muschick E. Stand und Entwicklung strategischer Entscheidungsmodelle und deren Anwendung in der Elektroenergietechnik, *Elektrie* 33 (1979), 11, S. 565..568.
10. Wald A., Statistical Decision Functions, New York. J. Wiley & So., 1950.
11. Savage L. J. The Theory of Statistical Decision, *Journal American Statistic Association* 46 (1951), S. 55..67.
12. Беляев Л. С., Решение сложных оптимизационных задач в условиях неопределенности. — Новосибирск: «Наука», 1978, 126 с.
13. Hurwicz L., Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance, Cowles Commission Discussion Paper, *Statistics* (1951), 370.
14. Hodges Jr. J. L., Lehmann E. L., The Use of Previous Experience in Reaching Statistical Decision, *Ann. Math. Statistics*, (1952), 23, S. 396..407.
15. Гермейер Ю. Б., Введение в теорию исследования операций. — М.: «Наука», 1971.
16. Peschel M., Ingenieurtechnische Entscheidungen. Berlin: Verlag Technik 1980.
17. Muschick E. Zur Anwendung der Theorie der Spiele auf Probleme der Elektroenergietechnik. Dissertation B, TU Dresden, 1975.
18. Zadeh L. A., Fuzzy Sets, *Information and Control* (1965) 8, S. 338..353.
19. Schneeweiss H. Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin Heidelberg New-York: Springer Verlag 1967.
20. Hansel V. Ein allgemeines Entscheidungskonzept zur Bearbeitung mehrzielorientierter Informationsmangelprobleme. Dissertation A, IH Zittau, 1984.
21. Müller P. H., Neumann P., Storm R., Tafeln der mathematischen Statistik. Leipzig: VEB Fachbuchverlag 1973.
22. Kofler E., Menges G. Entscheidungen bei unvollständiger Information. Berlin Heidelberg New-York: Springer Verlag 1976.
23. Stoljarov V. u. a. Zur Technik und Methodologie einiger quantifizierender Methoden der soziologischen Forschung. Berlin: Dietz Verlag 1966.

24. Berger F., Strategisches Modell zur dynamischen Planung Elektrischer Übertragungsnetze. Dissertation A, IH Zittau 1982.
25. Krelle W. Präferenz- und Entscheidungstheorie. Tübingen: J. C. B. Mohr, 1968.
26. Lindenackers K. H., Bedeutung technischer Risiken. *Atomwirtschaft* XIX (1974), 6, S. 284...289.
27. Reactor safety study — an assessment of accident risk in U. S. commercial nuclear power plants draft, WASH-1400 — 1974 USAEC, Washington.
28. Müller P. H., Beyermann U., Urban B., Muschick E. Zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Formulierung des Risikobegriffs, *Elektrie* 37 (1983), 5, S. 259...262.
29. Bauer H. Zur Berechnung der Gefährdung infolge teilweiser Gleichzeitigkeit von Fehler und Bereitschaft, *Elektrie* 32 (1978), 5, S. 234—240.
30. Kinder H., Entwurf von Grundschaltungen für Hochspannungsschaltanlagen. Dissertation B. Techn., Hochschule Ilmenau 1980.
31. Веников В. А., Асрахов Ю. Н., Применение теории подобия при анализе развития энергосистем во времени, *Научн. докл. высшей школы, сер. Энергетика*, 1959, № 2, с. 325—333.
32. Zimmermann H. J. Description and Optimization of Fuzzy Systems, *Int. J. General Systems* (1975), 2, 209—215.
33. Kaufmann A., Theory of Fuzzy Subsets. New-York, San-Francisco, London: Academic Press 1975.
34. Bellmann R. E., Zadeh L. A., Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science* 17, (1970), 4, B 141 — B 164.

### Дополнительная литература

- Autorenkollektiv: Einführung in die Entscheidungstabellentechnik. Reihe Automatisierungstechnik, Bd. 176, Berlin: VEB Verlag Technik, 1976.
- Bauer H. Die Gefährdung unter Berücksichtigung der Fehlerbereitschaft, *Energietechnik* 25 (1975) 12, S. 551—555.
- Fandel J. Optimale Entscheidung bei mehrfacher Zielsetzung. Berlin: Springer Verlag 1971.
- Fishburn P. C. Utility Theory for Decision Making. New York: J. Wiley & So., 1970.
- Gottfinger H. W. Grundlagen der Entscheidungstheorie, Stuttgart: Gustav Fischer Verlag 1974.
- Hinderer K. Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag 1970.
- Kofler E. Das Modell des Spiels in der wirtschaftlichen Planung in Mathematik und Wirtschaft, Band 7. Berlin: Verlag Die Wirtschaft 1970.
- Mag W. Information und Entscheidung. München: Verlag Franz Vahlem 1977.
- Neumann J., Morgenstern O. Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton University Press, Princeton, 1953.
- Newmann W. I. Extension of the Maximum Entropy Method, *IEEE Transactions Information Theory* 23 (1977) 1, 89—93.
- Peipmann R. Grundlagen der technischen Erkennung. Berlin: VEB Verlag Technik 1975.
- Shannon C. E., Weaver W. The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois, Urbana 1949.
- Streizeel R. Systematische Darstellung technischer Anwendungen der Informationstheorie. Dissertation B, TU Dresden, 1977.
- Zangemeister C. Nutzwertanalyse in der Systemtechnik. München: Wirtmannsche Buchhandlung 1971.

- Zentes J. Die Optimalkomplexion von Entscheidungsmodellen. Köln, Berlin, Bonn, München: Carl Heymanns Verlag KG 1976.
- Risiko-Schnittstelle zwischen Recht und Technik. Tagungsleitung Prof. Dr-Ing. G. Hosemann, Nürnberg, Offenbach: BDE Verlag Berlin 1982.
- Socklisch S. Prozess analyse mit unscharfen Verfahren, VEB Verlag Technik, Berlin, 1987.
- Богатырев Л. Л., Ильичев Н. Б. Использование теории нечетких множеств при управлении аварийными режимами энергосистем, *Изв. вузов, сер. Энергетика*, № 10 (1987).
- Ester J. Systemanalyse und mehrkriterielle Entscheidung. VEB Verlag Technik, Berlin, 1987.
- Farghal S. A. Generation expension planning using the decision tree technique, *Elec. Power Syst.* **13** (1987), 59—70.
- Furukawa N. Recumence set relations in stochastic dynamic decision processes, *Math. Op. Stat. Ser. Opt.* **13**, 113—122 (1982).
- Hammond K. P. Direct composition of the efficacy on intuitive and analytical cognition in expert judgement, *IEEE trans. on syst. man cybern.* **SMC-17** (1987) 5, 753—770.
- Henig M. I. Vector-valued Dynamic Programming, *SIAM Contr. Opt.* **21**, 3 (1983).
- Klotzler R. Multiobjective Dynamic Programming, *Math. Opt. Stat. Ser. Opt.* **9**, 423—426 (1978).
- Montazemi A. R. An exception reporting information system for illstructured decision problems, *IEEE trans. on syst. man cybern.* **SMC-17** 5, S. 771—779.
- Peschel M., Riedel C. Polyoptimierung, Verlag Technik, Berlin, 1976.
- Savory S. Expertensysteme: Nutzen für Ihr Unternehmen. Ein Leitfaden für Entscheidungsträger, Computer AG, Nixdorf, Oldenburg.
- Веников В. А. и др. О методах решения многокритериальных оптимизационных задач электроэнергетики с неопределенными величинами, *Электричество*, № 2, с. 1—7 (1987).
- White D. J. Multiobjective Interactive Programming. *J. Op. Res. Soc.* **31**, 517—523 (1980).



---

## ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

---

**Аксиома линейности** 153  
— **рефлексивности** 153  
— **транзитивности** 153  
**Анализ критериальный** 191  
— **чувствительности** 189  
**Антиконус** 17

**Байеса — Лапласа** критерий  
23, 24, 40, 129  
«**Бернуллизация**» минимаксно-  
го критерия 101  
**Биномиальный закон распреде-**  
**ления** 70  
**Булеан** 165

**Вариант решения оптимальный**  
11

**Вейбулла** распределение 66,  
144, 145

**Веникова** критериальный ана-  
лиз 189, 190

**Вероятность летального исхода**  
161, 162

— **принятия ошибочного реше-**  
**ния** 67, 72—75

— **реализации** 63

**Ветвь дерева** 118

**Взвешивание** 109, 110

**Выигрыш варианта решения** 11

**Гермейера** критерий 32, 33, 40,  
44

**Граф** 117, 118

**Гурвица** критерий 31, 40, 51

**Дерево ошибок** 156

— **решений** 120, 121, 127

— **событий** 118

**Дефект варианта решения** 81,  
84

**Дефицит информации** 188

**Диапазон неопределенности па-**  
**раметра** 146

**Дирака  $\delta$ -функция** 176

**Дисперсия** 106

**Допустимая граница риска** 36

**Заде** теория нечетких мно-  
жеств 192, 193

**Значимость** 61, 65, 87—89

**Интерквартиль** 107, 108

**Информация** субъективная  
110—112

— **кусочно-линейная** 101

**Квантиль** 70, 74, 76

**Конус предпочтения** 17

**Кофлера — Менга** критерий  
адаптивный 100, 101

**Коэффициенты влияния** 61,  
87—89

— **подобия** 190

**Критерии классические** 22

— — **применение** 27—29

— **производные** 30—33, 36, 40

- составные 33—35, 52
- сравнение 40
- Критерий азартного игрока 51
- гибкий 91—93, 98, 129
- минимаксный 22
- — расширенный 25, 26

*Лапласа* преобразование 178

Линии уровня 18, 19, 43—45

Максимум гладкий 130

Математическая логика, тер-  
мины 165, 194

Математическое ожидание ус-  
ловное 169

Матрица платежная 123, 124

— решений 13, 31, 38, 123

Метод интервалов 107, 108

— эквивалентов детерминиро-  
ванных 189

— — однозначных 189

Множества выигрышные 34

— нечеткие 192, 193

*Мооса — Мартенса* шкала 153

Надежность 11, 12

Направляющая прямая 43, 45

Номограмма для определения  
вероятности неблагоприят-  
ных ситуаций 174

Область неопределенности 18

Объем выборки 97

Отклонение среднеквадратиче-  
ское 65, 90

Отношение частичного порядка  
17

Оценка медианная 110

— решения 11

— риска 84

— субъективная 158

Оценок субъективных пробле-  
ма 104

Параметры детерминированные  
54

— стохастические 54, 55

*Парето* множество 184

Поверхность уровня 18, 19

Погрешность функции, оценка  
130

— — полезности 129, 130

Позиция нейтральная 14

— оптимистическая 14, 19

— пессимистическая 14, 15, 19

Полезность решения 11, 12, 52

Поле полезности решений 16,  
17

Полиоптимизация 184, 185

Правила выбора решения 11,  
24, 25, 36

Принцип минимальной забла-  
говременности 136, 188

Проблема риска 23

Программа оптимизации де-  
терминистская 126

Процесс выбора решения 94

*Пуассона* распределение 180

Распределение логарифмиче-  
ское 145

— модальные величины 110,  
111

— нормальное 66, 144

— решеточное 179

— смешанное 109

— экспоненциальное 145

Релевантность параметра 57,  
88, 145, 146

— — абсолютная 60

— — относительная 61

Решение детерминированное  
12

— локально-оптимальное 138

— многоцелевое 116, 117, 181

— одноцелевое 116

— понятие 10

— результат 11, 12

— с повышенной адаптивной  
способностью 188

- Риск безопасности 170, 171  
 — возможный 81, 82  
 — допустимый 26, 53, 82, 159  
 — — оценка 164  
 — зависимость от числа реализаций 177  
 — неоднократный 173, 174  
 — оправданный 162  
 — оценка 157, 158, 162, 163  
 — понятие 8, 9, 155  
 — технико-экономический 169, 170  
 — технический 168  
 — формальное описание 165
- Свертка, показатель кратности 179  
 Ситуация выбора решения 115, 116  
 — — фатальная 20  
 Состояние внешнее 12  
 — — дискретизация и комбинирование 140, 144  
 Степень риска 161  
 Стильеса интеграл 154  
 Стратегий запаса 125  
 Стратегия внешних состояний 125  
 — выбора решения 124  
 — — — CL 138  
 — — — FB 138  
 — — — OL 137, 138  
 — учета обратной связи 102  
 Схема процесса принятия решения 115—117  
 — — — многошаговая 133, 134  
 — — — одношаговая 131, 132  
 — — — по критерию гибкому 135  
 — — — — классическому 133  
 — — — — производному 134
- Свиджа критерий 15, 24, 25  
 Тейлора ряд 147  
 Теорема центральная предельная 105  
 Теория линейных кодов 143  
 — нечетких множеств 36, 192—196  
 Точка антиутопическая 16, 17  
 — утопическая 16, 17
- Узлы решений 119, 122  
 — событий 122
- Фактор доверительный 68  
 — — прогностический 68, 73  
 — — эмпирический 68, 69, 99  
 — — эмпирическо-прогностический 68, 75—77, 98, 99  
 Факторы внешние 54, 55  
 Формализация процесса принятия решений 7, 8  
 Формула свертки 176  
 Функция затрат приведенная 139  
 — индикаторная 166, 193  
 — оценочная 13—15, 19—22, 32, 60, 92, 151  
 — перехода 139  
 — полезности 59, 116, 128  
 — предпочтения 18, 19, 43—48, 51, 52  
 — — азартного игрока 47, 48  
 — решающая 137  
 — риска 166  
 — — аддитивная 167  
 — характеристическая 185, 186, 193, 194  
 — целевая 185, 190, 191  
 — штрафная 167, 175, 177
- Ходжа — Лемана критерий 31, 32, 40, 49, 50

- Цели конкурирующие** 181, 182  
— кооперативные 181, 182  
— нейтральные 181, 182  
**Цель частичная** 116  
**Центральная предельная теорема** 105
- Частота реализации** 97, 98  
**Число интервалов дискретизации** 89, 90  
**Чувствительность** 101
- Шеннона энтропия** 62  
**Шкалы интервальные** 153, 154
- масштабные 153, 154  
— номинальные 153  
— упорядоченности 153
- Эйлера константа** 144  
**Элементарное сравнение вариантов решения** 21  
**Энтропия** 61—63, 87—89  
— дифференциальная 64, 65, 144  
**Эффект решения суммарный** 167  
— стабилизации выбора решения 59, 102

---

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие . . . . .	5
1. Введение . . . . .	7
2. Основная формальная структура принятия решений . . . . .	11
2.1. Матрица решений . . . . .	11
2.2. Оценочная функция . . . . .	13
2.3. Особые случаи . . . . .	21
3. Классические критерии принятия решений . . . . .	22
3.1. Минимаксный критерий . . . . .	22
3.2. Критерий Байеса — Лапласа . . . . .	23
3.3. Критерий Сэвиджа . . . . .	24
3.4. Расширенный минимаксный критерий . . . . .	25
3.5. Применение классических критериев . . . . .	27
4. Производные критерии . . . . .	30
4.1. Критерий Гурвица . . . . .	30
4.2. Критерий Ходжа — Лемана . . . . .	31
4.3. Критерий Гермейера . . . . .	32
4.4. BL (MM) -критерий . . . . .	33
4.5. Критерий произведений . . . . .	36
4.6. Принятие решений согласно производным критериям . . . . .	38
5. Связи между критериями . . . . .	42
5.1. Критерии с прямоугольными конусами предпочтения . . . . .	43
5.2. Критерий с прямыми предпочтения . . . . .	48
5.3. Производные критерии . . . . .	49
6. Количественные характеристики ситуации принятия решений . . . . .	54
6.1. Информация принимающего решения . . . . .	54
6.2. Значимость независимого параметра . . . . .	60
6.3. Энтропия независимого параметра . . . . .	62
6.4. Доверительные факторы . . . . .	68
6.5. Принятие решения при наличии риска . . . . .	80
6.6. Опорные величины для оценки риска . . . . .	84
6.7. Пример оценки значимости параметра для некоторой простой функции при различных его вероятностных распределениях . . . . .	87
7. Гибкий критерий выбора решения . . . . .	91
7.1. Свойства . . . . .	91
7.2. Применение . . . . .	96

7.3. Адаптивный критерий Кофлера — Менга с использованием ку- сочно-линейной информации . . . . .	100
<b>8. Субъективно устанавливаемые параметры . . . . .</b>	<b>103</b>
8.1. Проблематика . . . . .	103
8.2. Подготовка и проведение оценок . . . . .	104
8.3. Обработка данных . . . . .	107
8.4. Гибкий выбор при субъективной полезной информации . . . . .	110
8.5. Примеры . . . . .	111
<b>9. Анализ ситуаций выбора решения . . . . .</b>	<b>115</b>
9.1. Общая структура . . . . .	115
9.2. Варианты решения и исходные данные . . . . .	117
9.3. Ошибки решения . . . . .	128
9.4. Процесс принятия решения . . . . .	131
9.5. Дискретизация и комбинирование внешних состояний . . . . .	140
9.6. Пример расчета числа дискретизирующих шагов для оценочной функции (6.69) . . . . .	151
<b>10. Полезность вариантов решения . . . . .</b>	<b>152</b>
<b>11. Риск . . . . .</b>	<b>155</b>
11.1. Понятие и оценка . . . . .	155
11.2. Сравнение степеней риска . . . . .	161
11.3. Формальное описание риска . . . . .	165
11.4. Частные случаи . . . . .	168
11.5. Неоднократный риск . . . . .	173
<b>12. Многоцелевые решения . . . . .</b>	<b>181</b>
12.1. Общие положения . . . . .	181
12.2. Реализация целей . . . . .	183
12.3. Выбор внутри эффективных множеств . . . . .	184
<b>13. Альтернативные методы . . . . .</b>	<b>188</b>
13.1. Основные пути выбора решения . . . . .	188
13.2. Критериальный анализ . . . . .	189
13.3. Нечеткие множества . . . . .	192
<b>14. Перспектива . . . . .</b>	<b>197</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>198</b>
<b>Предметно-именный указатель . . . . .</b>	<b>201</b>

### **УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛИ!**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

**Научное издание**

**Эдвин Мушик, Пауль Мюллер**

**МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ**

Зав. редакцией В. И. Пропой. Старший научный редактор Ю. Б. Воронов. Младшие научные редакторы Ю. В. Иванова, Л. В. Тарасова. Художник А. А. Лукьяненко. Художественный редактор Н. М. Иванов. Технический редактор Т. А. Мирошина

**ИБ № 7093**

Сдано в набор 28.04.90. Подписано к печати 12.09.90. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 1. Печать высокая. Гарнитура Литературная. Объем 6,5 бум. л. Усл. печ. л. 13,0. Усл. кр.-отт. 13,0. Уч.-изд. л. 11,29. Изд. № 7/6624. Тираж 18 100 экз. Зак. 152. Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Мир». В/О «Совэкспорткнига» Государственного комитета СССР по печати. 129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Московская типография № 11 Государственного комитета СССР по печати. 113105, Москва, Нагатинская ул., д. 1.